



# **Especialización en Docencia Universitaria**

## **Trabajo Final de Especialización en Docencia Universitaria (TFE)**

La demostración matemática en Álgebra I:  
algunas propuestas de enseñanza para números enteros

Universidad Nacional de Hurlingham

Profesor: Sebastián Fuentes

Estudiante: Susana De Toma

Marzo, 2021

# Índice

<b>Introducción</b> .....	1
<b>Capítulo 1. Marco Teórico</b> .....	5
1.1 De qué hablamos cuando hablamos de la demostración matemática.....	5
1.2 La validación como punto de llegada.....	8
1.3 Demostrar con qué objeto o ¿para qué?.....	10
1.4 Dimensión descriptiva de la demostración matemática ¿de qué se trata?.....	11
1.5 La demostración matemática como proceso.....	20
1.6 La demostración matemática como objeto de enseñanza.....	25
1.7 Modelo metodológico para el abordaje de la demostración matemática.....	27
<b>Capítulo 2. Escenario: tiempo y espacio</b> .....	33
2.1 Caracterización de la UNAHUR.....	33
2.2 Caracterización del Profesorado Universitario de Matemática .....	34
2.3 Introducción a la Matemática .....	35
2.3.1 Caracterización.....	35
2.3.2 La demostración matemática y su ubicación en el programa.....	38
2.4 Álgebra I.....	38
2.4.1 Caracterización.....	38
2.4.2 La demostración matemática y su ubicación en el programa.....	41
<b>Capítulo 3 Preparando el Análisis</b> .....	42
3.1 Dimensiones de la demostración matemática y su enseñanza: sus categorías de análisis .....	42



## **Resumen**

En este Trabajo Final de Especialización en Docencia Universitaria se proporciona un breve encuadre teórico sobre la demostración matemática y su enseñanza.

Se analiza una propuesta de enseñanza de la demostración matemática aplicada a números enteros en Álgebra I articulada con Introducción a la Matemática, en el primer año del Profesorado Universitario de Matemática de la Universidad Nacional de Hurlingham.

Por último, se propone una mejora sobre la propuesta de enseñanza analizada, a la luz de la teoría y del análisis previo.

## **Introducción**

Este Trabajo Final de Especialización en Docencia Universitaria (TFE) trata sobre la demostración matemática y lo relativo a su enseñanza, en particular la demostración en las clases de matemática del primer año del Profesorado Universitario de Matemática de la Universidad Nacional de Hurlingham (UNAHUR).

La demostración matemática (de ahora en más demostración) es un objeto de especial significación en matemática y ocupa un lugar central en su desarrollo. Para Garnier y Taylor (1996) la demostración es uno de los conceptos claves de la disciplina matemática y está vigente como recurso de comunicación, de validación y de ampliación conceptual de una teoría. También es un objeto de interés didáctico. Para Hanna y Jahnke (1996), al ser la demostración una característica esencial de la matemática, debería ser una componente clave de la educación; un hilo conductor de la experiencia matemática de todo aquel que la estudie.

Sin embargo, la demostración como proceso de construcción y como producto final, es uno de los aspectos de la matemática considerado como difícil de enseñar y aprender. Existen muchos estudios relacionados con su aprendizaje y enseñanza (Bell, 1976; Recio, 1999; Balacheff, 2000; D'Andrea, 2010).

El estudiante universitario en Argentina viene de un ciclo medio donde en general el desarrollo de la matemática se centra en la aplicación de algoritmos (Parra 1990; D' Andrea, 2010); a lo que se le suma otra dificultad que es la lectura y comprensión de un enunciado matemático y su extrapolación al lenguaje coloquial y simbólico.

Si miramos lo que sucede en las primeras dos materias del profesorado de matemática de la UNAHUR, tenemos lo siguiente: en Introducción a la Matemática, la primera materia, se observa que los estudiantes tienen muchas dificultades cuando tienen que resolver un problema donde la respuesta se basa en un argumento, una validación o en una explicación del porqué de una respuesta. En la segunda materia, Álgebra I, los estudiantes necesitan para poder comprender cualquier contenido matemático o resolver un problema utilizar correctamente propiedades o demostraciones; por lo que si no traen algunas habilidades ya aprendidas este trabajo resulta muy difícil.

Partiendo de este escenario y sumado al hecho de que nuestros estudiantes serán profesores de matemática, nos preguntamos: ¿qué mejoras pueden proponerse para la enseñanza de la demostración en matemática aplicada a números enteros al comienzo de la carrera?

En este TFE centraremos la mirada en el problema de la enseñanza de la demostración matemática y su articulación en las materias Introducción a la Matemática y Álgebra I<sup>1</sup>; es decir, explicitaremos y analizaremos cuáles fueron las actividades y acciones de enseñanza desarrolladas en el 2020. Con el propósito de mostrar esta articulación elegimos un tema común: los números enteros, en especial divisibilidad, números primos y compuestos.

La irrupción de la pandemia y la llegada de la cuarentena (marzo de 2020) nos obligó de un momento para otro al pasaje de la presencialidad a la virtualidad. Lo que nos impulsó a repensar las clases generando la posibilidad de nuevas experiencias educativas mediadas por la tecnología, porque sabíamos que la clase ya no era, ni podría ser la de antes.

---

<sup>1</sup> Dos materias correlativas del primer año del Profesorado Universitario de Matemática de la UNAHUR.

Transcurrido casi un año del inicio de la pandemia y aún en ella, hemos generado propuestas pedagógicas, que nos permiten revisar nuestros modos de enseñar, a la luz tanto de la experiencia que veníamos desarrollando en la presencialidad como en la virtualidad, sumado a la lectura de nuevos textos de matemática y a la incorporación de nueva bibliografía pedagógica como resultado del cursado de la Especialización en Docencia Universitaria. Todo lo anterior nos permitió sistematizar, profundizar y ampliar nuestras propuestas de enseñanza. La mejora consiste en reformular las actividades propuestas en el ciclo 2020 y escribir detalladamente los modos de enseñanza y las preguntas que orientan los procesos de argumentación y justificación con los modos de validación y de producción de conocimiento matemático (D'Andrea, 2010). En consecuencia, generamos una propuesta de mejora en torno a la demostración matemática en números enteros a través de una secuencia didáctica. Ésta se centra en la demostración como proceso y puede ser extrapolable a cualquier materia de matemática de un primer año de un profesorado universitario de matemática que trabaje con números enteros, con características similares a la de la UNAHUR.

En este TFE nos proponemos los siguientes objetivos:

**Objetivos generales:**

- Describir y analizar los debates actuales en torno a la demostración matemática y su enseñanza.
- Describir y analizar la propuesta de enseñanza respecto a la demostración matemática aplicada a números enteros, que se trabajó en el ciclo 2020.
- Proponer una mejora para la enseñanza de las demostraciones algebraicas de los números enteros en Introducción a la Matemática articulada con Álgebra I.

**Objetivos específicos:**

- Analizar los desarrollos de la demostración matemática en Introducción a la Matemática y Álgebra I a la luz de las categorías: tipos de actividad demostrativa, estructura de las propiedades y tipos de demostración y funciones de la demostración matemática y su enseñanza.

- Explicitar los modos de trabajos y las acciones realizadas por el docente en el 2020 en torno a la demostración matemática y su enseñanza aplicada a números enteros.
- Proponer actividades guiadas a través de ejercicios con preguntas, que se pueden trabajar en una clase de matemática y que permiten la reflexión, comprensión y sentido de la demostración matemática en números enteros en las clases de primer año de un profesorado de matemática.
- Explicitar los modos de trabajos y las acciones para la enseñanza que el docente puede generar en clase a partir de la propuesta presentada para trabajar con números enteros.

Debido a que uno de los propósitos del presente trabajo es mostrar la demostración matemática y su enseñanza en una propuesta articulada entre Introducción a la Matemática y Álgebra I, los primeros tres capítulos son comunes a los TFE de Susana De Toma y Mariana Pérez. El trabajo se organiza de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se aborda las diferentes concepciones sobre la demostración matemática y su enseñanza: sus significados, funciones y dimensiones.

El Capítulo 2 refiere al escenario de este trabajo en una búsqueda de una enseñanza situada. Por lo tanto, se encontrarán algunas características de la UNAHUR, del Profesorado Universitario de Matemática y de las materias consideradas en este trabajo.

En el Capítulo 3 se explicita las categorías que permitieron el análisis del objeto de estudio, su recorrido, los criterios de acceso y sistematización, la justificación y la relevancia de la demostración matemática y su enseñanza en la universidad. Para ello, iniciamos la búsqueda y lectura sobre las investigaciones actuales en el tema, analizamos las bibliografías específicas, revisamos las aulas virtuales, el diseño de las clases, las guías prácticas y teóricas y las propuestas de evaluación.

En el Capítulo 4 analizamos las propuestas de enseñanza que veníamos desarrollando en Álgebra I y su articulación con Introducción a la Matemática, a la luz de la

sistematización de la lectura que se encuentra en el Capítulo 1 y con las categorías de análisis citadas en el Capítulo 3.

En el Capítulo 5 se desarrolla una propuesta de mejora a través de una secuencia didáctica, donde se explicitan los contenidos con sus actividades de enseñanza necesarias previas a la demostración, y se analiza sus modos de trabajo en el aula. Cerramos este capítulo con las conclusiones del TFE.

En síntesis, este trabajo ofrece una propuesta de mejora para la enseñanza de la demostración aplicada a números enteros, para trabajar tanto en la virtualidad como en la presencialidad o en una modalidad mixta.

## **Capítulo 1. Marco teórico**

A lo largo de este capítulo recorreremos los distintos significados, funciones y dimensiones en relación al concepto de demostración matemática y de su enseñanza.

### **1.1 De qué hablamos cuando hablamos de la demostración matemática**

Los matemáticos se ocupan de descubrir y comunicar ciertas verdades y la demostración es un método para comunicar una verdad matemática a otra persona que también "habla" el mismo idioma (Solow, 1992).

El lenguaje matemático se caracteriza fundamentalmente por su precisión, un concepto definido en matemática no admite ambigüedades al igual que una demostración, que,

en principio, definiremos como una secuencia lógica que conduce a una conclusión. De lo que se desprende que para comprender una demostración resulta necesario por lo menos tres acciones:

1. Conocer y comprender el lenguaje matemático,
2. Identificar el método que utiliza el razonamiento que lo constituye, y
3. Formular y responder preguntas en relación a la demostración, a sus aplicaciones, a sus alcances y a sus limitaciones.

Considerar solamente a la demostración matemática como la idea de una formulación deductiva y formal, entendida de un modo rígido y absoluto en el seno de la comunidad matemática, como la única concepción posible, necesita de una revisión teórica (Godino, Recio, 2001). Realizaremos un recorrido sobre los diversos significados de la idea de la demostración en relación con otras nociones próximas tales como explicación, argumentación, razonamiento, prueba, etc.

La demostración es utilizada en distintos contextos y en ellos adquiere diferentes sentidos. Como veremos para algunos autores todos ellos son sinónimos (Balacheff, 1982) y para otros (Duval, 1999) poseen diferencias fundamentales, en consecuencia, diremos que la demostración es un concepto polisémico y en tanto tal, debe explicitarse su definición con referencia al contexto en la que se la utiliza.

Muchas veces, en la enseñanza de la matemática, se utilizan como términos equivalentes la argumentación, la explicación, la prueba y la demostración, por lo tanto, resulta central definir claramente los alcances de cada uno de estos términos para que no se constituyan en un obstáculo epistemológico a lo largo del presente trabajo. En principio todos estos conceptos comparten una idea común la de validar (o justificar) una afirmación dando las razones o los argumentos, sin embargo, la diferencia radica en las situaciones en las que se las usa y los recursos expresivos que se ponen en juego.

La comprensión de las relaciones entre la explicación, la argumentación y la prueba nos ayuda a interpretar mejor el significado de la demostración, permitiéndonos abrir un proceso de aproximación a la noción de demostración matemática más cercano a las capacidades lógicas de los estudiantes de los primeros años de la educación universitaria.

Balacheff (1987) denomina explicación a la idea primitiva de la cual derivan las de prueba y demostración, es un discurso que pretende hacer inteligible la verdad de una proposición ya conocida. No se reduce a una cadena deductiva, sino que se organiza y se construye a partir del lenguaje coloquial. Más explícitamente, el autor afirma que la explicación es un “discurso que pretende hacer inteligible el carácter de verdad, adquirido para el locutor, de una proposición o de un resultado”. Tengamos presente que está arraigado en los conocimientos del locutor y en lo que para él son sus reglas personales de decisión de la verdad. Una prueba se compone, por su parte, de explicaciones aceptadas por una comunidad dada en un momento dado, lo que hace que pueda evolucionar en el tiempo o ser aceptada por una comunidad determinada y no por otra. Para que una explicación sea una prueba debe ser reconocida por alguien como razón suficiente en el correspondiente marco discursivo. Por otro lado, la demostración es un tipo particular de prueba y constituye una sucesión de enunciados organizados siguiendo reglas determinadas.

Krummeheuer (1995) avanza sobre el concepto de argumentación y los divide en argumentos analíticos y sustanciales. Los primeros son característicos de las deducciones lógicas correctas, siendo tautológicos, esto es, un aspecto latente de las premisas se elabora visiblemente, pero no añaden nada a la conclusión que no fuera ya una parte potencial de las premisas. Los argumentos sustanciales, por el contrario, expanden el significado de las proposiciones en la medida en que relacionan apropiadamente un caso específico a éstas por actualización, modificación o aplicación.

Duval (1999) considera que la explicación y argumentación son conceptos diferentes. En la argumentación se trata de mostrar el carácter de verdad de una proposición, mientras que en la explicación los enunciados tienen una intención descriptiva de un fenómeno, resultado o comportamiento.

Duval avanza y distingue la demostración de la argumentación. Son dos tipos de razonamiento matemático<sup>2</sup> que poseen estructura, vínculos de organización y funcionamiento cognitivo distintos. La argumentación no es una demostración. Para que

---

<sup>2</sup> Un razonamiento matemático es la actividad intelectual, la mayoría de las veces no explícita, de manipulación de informaciones para producir nuevas informaciones a partir de datos (Balacheff, 1987).

un razonamiento sea considerado una demostración debe ser válido y tener como objetivo la verdad, mientras que la argumentación es un razonamiento que obedece a vínculos de pertinencia y no necesita estar vinculada con la validez, tiene como objetivo lo creíble y el convencimiento de los demás o de uno mismo, siendo un razonamiento de carácter natural. La demostración busca la verdad y la argumentación lo creíble y por lo tanto depende más de la coherencia que de las leyes lógicas.

En síntesis, tanto Balacheff como Duval utilizan el término demostración con significados similares, como una secuencia de enunciados articulados según reglas determinadas.

Godino y Recio (2001) consideran que la idea de explicación de Balacheff puede asimilarse a la noción de argumentación de Duval. Utilizan el término demostración para referirse de modo genérico al objeto emergente del sistema de prácticas argumentativas (o argumentaciones) aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, o sea situaciones que requieren justificar o validar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción.

Todas estas aproximaciones a la idea de la demostración matemática, desde la óptica de la educación matemática, nos indica que la explicación, la argumentación o la prueba, son objetos próximos a la demostración con variadas finalidades como la explicación, la sistematización, la comunicación y el convencimiento, y con diferentes significados de acuerdo al contexto.

En el presente TFE tomaremos la conceptualización de Balacheff “la explicación” de la que derivan las de prueba y demostración, con el propósito de hacer comprensible la verdad de una proposición ya conocida y no reducirla a una cadena deductiva que los estudiantes memorizan sin su profunda comprensión, sino que se organiza y construye a partir del lenguaje coloquial. Este tratamiento es importante al comienzo de la carrera, dado que los destinatarios de nuestro trabajo son nuestros estudiantes, que además serán futuros profesores de matemática. Reservaremos el término demostración para referirnos de modo genérico al objeto emergente del sistema de prácticas argumentativas (o argumentos) aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones

de validación<sup>3</sup> y decisión, esto es, situaciones que requieren justificar o validar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción.

## **1.2 La validación como punto de llegada**

Cuando pensamos en las actividades matemáticas que realizan los estudiantes es necesario tener en cuenta tanto los procesos de producción como las formas en las que se comunican y se aceptan los resultados de esa producción. Cada comunidad tiene formas propias de producir y de aceptar los saberes que produce (Panizza, 2005). Es evidente que tanto el proceso de producción, de comunicación como los resultados, están determinados por los conocimientos que poseen nuestros estudiantes y en ese proceso de producción se alternan diferentes tipos de razonamientos. Sin embargo, la legitimación de los saberes en la comunidad matemática se da al aceptar como válidos algunos enunciados como punto de partida y las explicaciones que derivan de ellos mediante encadenamientos deductivos denominados demostraciones. Esa forma que toma el saber para ser validado por la comunidad de referencia no representa el conjunto de razonamientos de distintos tipos llevados a cabo en el proceso de producción, tampoco recoge los caminos de búsqueda iniciados y descartados por no cumplir con lo que se busca. Se presenta el trabajo “en limpio” que muestra un paso a paso deductivo que sigue reglas lógicas aceptadas en la comunidad, pero se pierden los análisis de los sucesivos borradores que son los que permitieron llegar a la demostración acabada y final. Es por esta razón que en nuestra propuesta no presentamos las demostraciones como un saber acabado y cerrado y en cierta manera dogmático, pues no permite agregar ni sacar nada, en todo caso se limita a aplicar en situaciones equivalentes, ello obliga a los estudiantes a recordar/memorizar secuencias de razonamientos formulados por otros, no pudiendo alcanzar una profunda comprensión de ellos. Con nuestra propuesta buscamos que los estudiantes no sólo comprendan lo que los teoremas enuncian y explican, sino que avancen sobre el análisis de lo que no explican o para que situaciones no funcionan y por qué. Para ello es necesario diferenciar los conceptos de explicación, prueba y demostración, que vamos a utilizar.

---

<sup>3</sup>Definimos el término situaciones de validación al proceso mediante el cual se establece el carácter de verdad de un enunciado, su consistencia y su eficacia.

*Llamamos explicación a todo discurso sostenido por una persona o un grupo cuyo objetivo es el de comunicar a otro el carácter de verdad de un enunciado matemático.*

*Una prueba es una explicación aceptada por otro en un momento dado. Así una explicación puede tener el status de prueba para un grupo social dado, pero no para otros.*

*Una demostración es una prueba que tiene ciertas características: una social, es aceptada por la comunidad de matemáticos, y una de forma, un cierto número de enunciados son aceptados como verdaderos y otros son deducidos de estos o de otros demostrados a partir de reglas de deducción tomadas de un conjunto de reglas lógicas.*

Esta diferenciación es interesante al considerar los procesos de producción y validación de nuevos conocimientos tanto en la comunidad matemática de académicos como en la clase cuando se instala un tipo de trabajo matemático en el que funcionen quehaceres matemáticos “como” los que se desarrollan en la comunidad científica.

En la clase, en los momentos de validación colectiva de lo producido, se consideran las explicaciones que dan los estudiantes con el objeto de ver si adquieren el carácter de prueba. Se ha estudiado que los estudiantes generan diferentes tipos de pruebas y, según el momento de la escolaridad se considera oportuno o no avanzar a la elaboración de demostraciones (Balacheff, 2000).

### **1.3 Demostrar con qué objeto o ¿para qué?**

Bell (1976) señala tres sentidos diferentes para la noción de demostración:

**Verificación:** asociado con la verdad de una proposición.

**Iluminación:** en el que se espera que una prueba sugiera una idea de por qué la proposición es verdadera.

**Sistematización:** donde los resultados se organizan en un sistema deductivo de axiomas, conceptos primitivos y teoremas.

Por otro lado, de Villiers (1993) presenta un modelo en el que se evidencian las funciones de la demostración desde el mundo matemático y en el aula; éstas son:

**Verificación o convicción:** establece la verdad de una afirmación. Se piensa a las demostraciones como autoridad absoluta para establecer validez de conjeturas y se considera detrás de teoremas la presencia de una secuencia de transformaciones lógicas. Normalmente se busca la demostración después de haber tenido la convicción de validez.

**Explicación:** exhibe los por qué de la verdad. En resultados evidentes o apoyados en evidencia cuasiempírica, la demostración explica causas.

**Sistematización:** organiza diversos resultados en un sistema que incluye axiomas, conceptos básicos y teoremas. Esta función ayuda a identificar inconsistencias y razonamientos circulares. Simplifica teorías integrando conceptos y proporcionando una visión global de la estructura subyacente.

**Descubrimiento o creación:** permite llegar a nuevos resultados. Esta función se apoya en la idea de que no todas las propiedades se descubren por intuición, sino que algunas pueden ser el producto de la demostración misma.

**Comunicación:** transmite el conocimiento matemático. En este punto se considera a las demostraciones como forma de discurso, de intercambio basado en significados compartidos.

de Villiers sostiene que la demostración no es un requisito para la convicción, sino al contrario. En muchas ocasiones, la intuición es la que convence de la veracidad de un resultado y una vez llegado a ese convencimiento, se motiva la demostración. Por esto, destaca la explicación como una función importante en la enseñanza de la demostración matemática.

El sentido de la demostración como iluminación de Bell al igual que de explicación de Villiers tienen una interpretación en términos educativos que ha sido desarrollado por Hanna y Jahnke (1996), donde analizan el término demostración ligado al de comprensión, promoviendo el uso en el aula de demostraciones que no solo demuestran, sino que expliquen. Hanna (1989) distingue entre demostraciones que demuestran y demostraciones que explican, especificando que éstas muestran "...no sólo que una demostración es verdad, sino también por qué es verdad". Propone un mayor protagonismo a aquellas demostraciones que fomenten la comprensión.

#### **1.4 Dimensión descriptiva de la demostración matemática ¿de qué se trata?**

En este apartado daremos algunas definiciones y ejemplos sobre los tipos de proposiciones y demostraciones matemáticas que usaremos para el análisis y la propuesta de mejora que se desarrollan en los Capítulos 4 y 5.

*Proposición:* Enunciado en el que se afirma algo, y que puede ser verdadero o falso.

En matemática existen dos tipos de proposiciones verdaderas: los axiomas y los teoremas, y dentro de los teoremas: lemas, corolarios y propiedades.

Un *axioma* es una proposición matemática verdadera que no requiere ser demostrada. Por ejemplo, el axioma del elemento mínimo que dice que todo conjunto no vacío de enteros, posee un elemento mínimo.

Un *teorema* es una proposición matemática verdadera que requiere ser demostrada. Expresan resultados claves dentro de una teoría matemática. Por ejemplo, el Teorema Fundamental de la Aritmética en números enteros que afirma que todo número entero salvo el 0, 1 y -1 se factoriza de manera única como producto de primos. Existen otras proposiciones que también requieren ser demostradas, pero no tiene la categoría de teorema, que puede ser un *lema* (necesario para demostrar un teorema), un *corolario* (una consecuencia de un teorema) o una *propiedad*. Por ejemplo, la propiedad que dice que si  $a$  es un divisor de  $b$  y  $a$  es un divisor de  $c$  entonces  $a$  es un divisor de  $b+c$ ; es una propiedad que sale directamente de la definición de divisibilidad en enteros.

Todas las proposiciones matemáticas verdaderas que requieren ser demostradas constan de una hipótesis, de una tesis y de una demostración. La *hipótesis* es una suposición que permite inferir una consecuencia; son los datos que se pueden usar para probar la validez de la propiedad. Debe destacarse que la hipótesis de una propiedad también incluye los conocimientos previos que se tienen al momento de establecer la hipótesis, conocidas como hipótesis implícitas (D' Andrea y Sastre, 2014). La *tesis* es una proposición mantenida con razonamientos que dan estructura a la demostración y es lo que se quiere probar que es válida a partir de la hipótesis y de deducciones lógicas.

Dos definiciones más que usaremos en este TFE es la de proposición recíproca de una proposición condicional  $p \rightarrow q$  y su contrarrecíproco.

*Proposición recíproca o simplemente el recíproco de  $p \rightarrow q$* : Es la proposición de la forma  $q \rightarrow p$ , o dicho de otra manera si pasa  $q$  entonces pasa  $p$ . Es una implicación cuya tesis es la hipótesis de la implicación directa  $p \rightarrow q$  y cuya hipótesis es la tesis de dicha implicación. El valor de verdad de la proposición recíproca no necesariamente es el mismo de la proposición directa.

*Proposición contrarrecíproca o simplemente contrarrecíproco de  $p \rightarrow q$* : Es la proposición de la forma  $\neg q \rightarrow \neg p$ , es decir si no pasa  $q$  entonces no pasa  $p$ . Es una implicación cuya hipótesis es la negación de la tesis de la implicación directa  $p \rightarrow q$  y la tesis es la negación de la hipótesis de dicha implicación. Tanto la proposición directa  $p \rightarrow q$  como la contrarrecíproca  $\neg q \rightarrow \neg p$  tienen el mismo valor de verdad.

Ibañes y Ortega (1997) revisan las demostraciones más usuales en la escuela secundaria y proponen una clasificación de las proposiciones que se quieren demostrar y de las técnicas de demostración: según su estructura lógica (tipos), según los procedimientos lógicos (métodos), según los procedimientos matemáticos (estilos) y según el procedimiento de exposición (los modos). En este apartado sólo indicaremos las que vamos a utilizar en este TFE; toda la clasificación se puede encontrar en Ibañes y Ortega, (1997). Los ejemplos mostrados forman parte de la propuesta de mejora que se encuentra en el Capítulo 5.

### **I. Según la estructura lógica del enunciado: tipos**

Todo teorema matemático comprende al menos una implicación, aunque no siempre aparece de manera explícita.

**Ejemplo<sup>4</sup>:** *Todo número entero  $a$  verifica que  $a|a$ .*

Al analizar y clasificar una proposición matemática que se quiere demostrar, es importante tener en cuenta tres cuestiones:

- ¿A qué tipo de proposición nos enfrentamos (implicación, doble implicación, universal, existencial)?
- ¿Qué datos se están asumiendo como verdaderos (hipótesis)?
- ¿Qué se debe demostrar (tesis)?

**\*En relación a la implicación:**

a) *Implicación simple, de condición necesaria o suficiente:*

Si  $p \rightarrow q$  se dice que  $q$  es condición necesaria para que se verifique  $p$  y que  $p$  es condición suficiente para que se verifique  $q$ . En este punto  $p$  es la hipótesis y  $q$  es la tesis. Coloquialmente se dice  $p$  implica  $q$  o si  $p$  entonces  $q$ .

b) *Doble implicación, de condición necesaria y suficiente:*

Si  $p \leftrightarrow q$  (la condición necesaria y suficiente para que se verifique  $p$  es  $q$  y recíprocamente,  $p \rightarrow q$  y  $q \rightarrow p$ ). Coloquialmente se dice  $p$  si y solo si  $q$  o  $p$  es equivalente a  $q$ .

**Ejemplos de a) y de b)<sup>5</sup>:**

a) *Si  $d|a$  y  $d|b$  entonces  $d|a+b$  ( $d|a+b$  es condición necesaria para que se verifique que  $d|a$  y  $d|b$  y que  $d|a$  y  $d|b$  es condición suficiente para que se verifique  $d|a+b$ ;  $d|a$  y  $d|b$  es la hipótesis y  $d|a+b$  es la tesis).*

Observar que en este caso que  $d|a+b$  no es condición suficiente para que  $d|a$  y  $d|b$ ; dicho de otro modo, la proposición si  $d|a+b$  entonces  $d|a$  y  $d|b$  es falsa.

b)  *$d|a$  si y solo  $d^2|a^2$  ( $d|a$  es condición necesaria y suficiente para que  $d^2|a^2$ )*

---

<sup>4</sup> Forma parte de la propuesta de mejora del Capítulo 5, actividad 1 en modo de trabajo.

<sup>5</sup> Forma parte del de la propuesta de mejora del Capítulo 5, actividad 1.

**Observación:** en la propuesta de trabajo tanto de Introducción a la Matemática como en Álgebra I no usamos los términos condición necesaria y/o suficiente, usamos un sinónimo que es “si...entonces” o “si y solo si”.

**\*En relación a los cuantificadores:**

a) En relación al *cuantificador existencial*  $\exists$  (*existe*). En este tipo de proposiciones se busca un elemento particular dentro del dominio que satisface determinada propiedad.

i) *De existencia simple*. Se limitan a asegurar la existencia de un objeto matemático.

**Ejemplo<sup>6</sup>:** El término existencia aparece en la definición de divisibilidad *d divide a a* ( $d|a$ ) *si y solo si existe un entero q tal que  $a=d.q$*

La *definición de un concepto matemático* es un enunciado donde sus elementos deben ser nociones primitivas de la teoría o definida previa e independientemente (no circular) y debe ser consistente sin involucrar contradicciones lógicas que deriven en que ningún objeto cumpla sus condiciones o que todos los cumplan. Por ejemplo, la noción de divisibilidad tiene sentido en los números enteros porque existen enteros que son divisibles por otros y enteros que no los son, por ejemplo 2 es divisible por 4 pero no por 5. En cambio, no tiene sentido esta definición en los reales ya que todo número distinto de cero divide a otro.

ii) *De existencia y unicidad*. Aseguran que el objeto al que se refieren, si existe es único.

**Ejemplo<sup>7</sup>:** El Teorema Fundamental de la Aritmética, ya mencionado en el apartado anterior, que asegura la existencia y unicidad de la factorización de un número entero en producto de primos, salvo para el 0, 1 y -1.

b)El *cuantificador universal*  $\forall$  (*para todo, todo*). Se trata de proposiciones que se enuncian para todos los objetos de un determinado dominio. Los teoremas de condición necesaria, suficiente o necesaria y suficiente pueden ser expresados, explícita o implícitamente, con el cuantificador universal.

---

<sup>6</sup> Definición que usamos para el trabajo en el Capítulo 5 de la propuesta de mejora de Introducción a la Matemática y Álgebra I, de los TFE de Susana De Toma y Mariana Pérez.

<sup>7</sup> Forma parte de la propuesta de mejora del Capítulo 5, actividad 7.

**Ejemplo<sup>8</sup>:** *Todo número entero  $a$  verifica que  $a|a$ .*

Este ejemplo indica que todo a número, cumple que, si  $a$  es entero, entonces  $a|a$ ; es decir

$$\forall a: a \text{ entero} \rightarrow a|a \text{ (aquí } p: a \text{ es entero y } q: a|a)$$

## II. Según los procedimientos lógicos: métodos

- a) **Método por silogismos (método directo).** Es la estrategia básica, parte de la hipótesis y las manipula convenientemente con las correspondientes herramientas para obtener la tesis. Para demostrar  $H \rightarrow T$ , usamos una cadena deductiva de implicaciones que parten de la hipótesis  $H$  y demuestran la tesis  $T$ ; cadena del estilo  $H \rightarrow M$ ,  $M \rightarrow L$  y  $L \rightarrow T$ . Se puede usar varias proposiciones intermedias o proposiciones auxiliares ya demostradas.

**Ejemplo<sup>9</sup>:** *Si  $d|a$  y  $d|b$  entonces  $d|a+b$ .*

*Demostración.* Como  $d|a$  y  $d|b$ , tenemos que  $a=d.q$  y  $b=d.k$  (partimos de la hipótesis y lo reescribimos usando la definición de divisibilidad), entonces  $a+b=dq+dk=d(q+k)$  (usamos la propiedad distributiva). Así tenemos que  $d$  es divisor de  $a+b$  pues  $q+k$  es el entero tal que  $a+b=d.(q+k)$ . Probamos así la tesis, es decir que  $d|a+b$ .

**Observación:** La mayoría de las demostraciones propuestas en las secuencias didácticas y en los problemas seleccionados para el análisis del trabajo realizado en Introducción a la Matemática y Álgebra I que forman parte de este TFE usan el método por silogismos.

- b) **Demostración por casos.** Si la hipótesis  $H$  es de la forma  $H_1$  o  $H_2$  o  $H_3$ , entonces para probar la propiedad  $H \rightarrow T$ , basta probar  $H_1 \rightarrow T$ ,  $H_2 \rightarrow T$ ,  $H_3 \rightarrow T$ .

**Ejemplo<sup>10</sup>.** En la demostración del Teorema Fundamental de la Aritmética, se usa la demostración por casos para mostrar que todo entero se factoriza como producto de primos (salvo 0, 1 y -1). Primeramente, se prueba que todo natural mayor que 1 se factoriza como producto de primos y luego, usando este resultado se prueba para los naturales negativos.

---

<sup>8</sup> Forma parte de la propuesta de mejora del Capítulo 5, actividad 1.

<sup>9</sup> Forma parte de la propuesta de mejora del Capítulo 5, actividad 1.

<sup>10</sup> Forma parte de la propuesta de mejora del Capítulo 5, actividad 7.

- c) **Demostración por reducción al absurdo.** Partiendo de un sistema consistente de proposiciones  $P$  que forman parte de la hipótesis, se pretende establecer la validez de la tesis  $C$ , y para ello se introduce una nueva hipótesis  $\neg C$  (no  $C$ ). Si con las reglas de inferencia se obtiene una contradicción de la forma  $R$  y  $\neg R$ , forzosamente el nuevo sistema de proposiciones -hipótesis- ( $P$  y  $\neg C$ ) es inconsistente; por lo que debemos admitir la validez de  $C$ .

**Ejemplo<sup>11</sup>.** *Proposición:* Si  $(a:b)$  no divide a  $c$  entonces la ecuación  $ax+by=c$  no tiene soluciones enteras. Para demostrarlo, se parte de que la ecuación tiene una solución entera, y mediante deducciones lógicas se llega a que  $(a:b)$  divide a  $c$ , lo que es una contradicción.

**Aclaración:**  $(a:b)$  es el máximo común divisor entre  $a$  y  $b$ .

Un caso particular de la demostración por el absurdo es la **demostración por contraposición o el contrarrecíproco**, si queremos probar que  $H \rightarrow T$ , partimos de que es válido  $\neg T$  (que es falso  $T$ ) y mediante deducciones lógicas se puede probar que es válido  $\neg H$  ( $H$  es falso). En este punto podemos decir que contradice la hipótesis, ya que  $H$  es verdadero, o bien decir que probamos que es válido  $\neg T \rightarrow \neg H$  (cabe aclarar que en lógica proposicional  $H \rightarrow T$  tiene el mismo valor de verdad que  $\neg T \rightarrow \neg H$ ; son equivalentes lógicamente).

Un ejemplo de este caso, se usa para probar la siguiente propiedad: Si  $a^2$  es par ( $H$ ), entonces  $a$  es par ( $T$ ). Para ello, se afirma que  $a$  no es par ( $\neg T$  verdadera), es decir que es de la forma  $a=2k+1$  (impar) y mediante cálculos matemáticos se llega a que  $a^2=2(2k^2+2k)+1$ , es decir que  $a^2$  no es par ( $\neg H$  es verdadera). Acá podemos decir que probamos la verdad de  $\neg T \rightarrow \neg H$ ; o decir que partiendo de que  $\neg T$  es verdadera llegamos a probar que  $\neg H$  es verdadera, o sea  $H$  es falsa; llegando a una contradicción ya que  $H$  es verdadera o sea  $a^2$  es par.

#### **d) Método de inducción completa.**

Este método es uno de los temas estudiados por los estudiantes en la unidad 1: números naturales, de la materia Álgebra I y es un método para demostrar que involucra los

---

<sup>11</sup>Forma parte de la propuesta de mejora del Capítulo 5, actividad 9.

números naturales. Básicamente dice que si queremos probar que una proposición  $P(n)$  es verdadera para todo  $n$  natural, tenemos que probar que

- $P(1)$  es verdadera.
- Si aceptamos que  $P(k)$  es verdadera para algún valor  $k$  natural, tenemos que probar que es verdadera para  $P(k+1)$ .

Usamos este método para demostrar la unicidad de la factorización de un entero como producto de primos (actividad 7 del Capítulo 5 de la propuesta de mejora).

#### **e) Método constructivo.**

Generalmente se usa este método cuando se quiere probar la existencia de un determinado objeto matemático.

Usamos este método en la actividad 9 del Capítulo 5 de la propuesta de mejora, en donde construimos todas las soluciones enteras de la ecuación lineal  $ax+by=c$ , dando un método para encontrarlas.

### **III. Según los procedimientos matemáticos: estilos**

Como hay teoremas relativos a las distintas áreas de la matemática: Geometría, Álgebra, Análisis, etc., es natural que, en cada caso, se utilicen los procedimientos propios de cada una de esas áreas. El estilo usado en las demostraciones matemáticas que forman parte de este TFE es el estilo algebraico-aritmético, donde se caracteriza por la utilización de símbolos para representar los objetos matemáticos y operar con ellos.

### **IV. Según el procedimiento de exposición: modos**

El matemático, en su tarea de investigación, recurre a tanteos, analogías y procede por inducción, pero publica sus resultados según un riguroso esquema hipotético-deductivo. El lector en general no accede a los caminos intuitivos recorridos por los matemáticos, sino que solo le llega el producto final. Ibañez y Ortega (1997), citando a Polya en su Obra Matemáticas y Razonamiento, afirma que

“Las matemáticas son consideradas como una ciencia demostrativa. Sin embargo, este es solo uno de los aspectos. La obra matemática se nos presenta, una vez terminada, como puramente demostrativa (...). No obstante, (...) hay que intuir un teorema matemático

antes de probarlo, así como la idea de la prueba antes de llevar a cabo los detalles. Hay que combinar observaciones, seguir analogías y probar una y otra vez.”

Existen dos modos en relación a la exposición de una teoría matemática:

- **Modo sintético o directo:** Es el modo característico de la presentación formalizada del producto final, que se ajusta a las exigencias del rigor lógico. La demostración de una propiedad se realiza mediante cadenas de implicaciones y equivalencias en las que la hipótesis es el primer eslabón y la tesis el último.  
La desventaja de la presentación de las demostraciones según este modo consiste en que algunos de los pasos se presentan de manera artificial, dificultando la interpretación intuitiva.
- **Modo analítico o indirecto:** Este modo se basa en reemplazar cada teorema por otro más simple hasta llegar a otro demostrado. Es el más adecuado para la exposición didáctica, ya que utiliza elementos que ya han sido justificados anteriormente.

La propuesta en este TFE es que el trabajo con las demostraciones matemáticas en las clases en los primeros años del Profesorado Universitario de Matemática sea significativo para los estudiantes. Muchas de las pruebas matemáticas que queremos que hagan siguen el modo de exposición directo, ya que son sencillas. En Álgebra I algunas de las demostraciones que los estudiantes tienen que leer usan el modo indirecto o sintético de exposición, ya que para probarlas se necesita de teoremas previos.

Aunque algunas sigan un modo u otro, en las propuestas presentadas se trabaja con el reconocimiento e interpretación de cada parte de la proposición a demostrar, con ejemplos que cumplan los datos proporcionados (hipótesis) y con un análisis de la validez de la tesis.

Por último, queremos enunciar los operadores lógicos y sus valores de verdad que usaremos en este TFE.

*Negación:* Sea  $p$  una proposición, entonces  $\neg p$  ( $\neg p$ ) se define como: verdadera si  $p$  es falsa, y falsa si  $p$  es verdadera.

*Conjunción:* Sean  $p$  y  $q$  dos proposiciones, entonces la proposición compuesta  $p$  y  $q$  ( $p \wedge q$ ) se define como: es verdadera si  $p$  y  $q$  ambas son verdaderas y es falsa, si  $p$  es falsa o  $q$  es falsa, o ambas son falsas.

*Disyunción:* Sean  $p$  y  $q$  dos proposiciones, entonces la proposición compuesta  $p$  o  $q$  ( $p \vee q$ ) se define como: es verdadera cuando  $p$  es verdadera o  $q$  es verdadera o ambas son verdaderas, y es falsa cuando  $p$  y  $q$  son falsas.

*Implicación:* Sean  $p$  y  $q$  dos proposiciones, entonces la proposición compuesta  $p \rightarrow q$  se define como: falsa cuando  $p$  es verdadera y  $q$  es falsa, y verdadera en cualquier otro caso. Si la implicación es la forma en que está escrita una proposición matemática, como la hipótesis ( $p$ ) es siempre verdadera, entonces la implicación  $p \rightarrow q$  es verdadera si  $q$  es verdadera; y es falsa si  $q$  es falsa.

*Equivalencia:* Sean  $p$  y  $q$  dos proposiciones, entonces la proposición  $p \leftrightarrow q$  se define como: es verdadera cuando ambas proposiciones son verdaderas o ambas falsas, y es falsa en cualquier otro caso.

## **1.5 La demostración matemática como proceso**

En este TFE estudiaremos la enseñanza de la demostración matemática en las clases de Introducción a la Matemática y Álgebra I, pensándola no solo como producto final sino también como proceso. Siguiendo la tesis doctoral Camargo (2010) vamos a usar el término *demostración matemática* cuando nos referimos al producto, y *actividad demostrativa* cuando estamos hablando del proceso.

Definimos *actividad demostrativa* como el conjunto de actividades que apoyan e impulsan la producción de una demostración matemática. Estas actividades previas a la demostración son: explorar, conjeturar, definir, argumentar, demostrar y sistematizar. A continuación, damos una breve descripción de cada una de ellas y ejemplificamos con ejercicios de la propuesta de Álgebra I que se encuentra en el Capítulo 5.

**Explorar.** Actividad de carácter experimental, relacionada con el uso de estrategias de tipo heurístico en busca de regularidades que se pueden generalizar o propiedades aún no identificadas.

La exploración en problemas relacionados con números generalmente se produce con la realización de ejemplos, la observación e identificación de un patrón de regularidad, una propiedad invariante o una característica a partir de las representaciones.

**Conjeturar.** Con el término conjeturar hacemos referencia a formular una suposición ya sea verbal, simbólica o gráfica, llamada conjetura, basada en evidencias empíricas. Cómo es producto de la exploración, se tiene un alto grado de certeza en la afirmación que se hace, pero su validez puede asegurarse cuando se justifique mediante una demostración matemática.

Este proceso de conjetura, a pesar de que es producto de la exploración, no es sencillo para el estudiante y requiere de la guía del docente para la obtención de formulaciones precisas del estilo: “si...entonces...”. Algunas de las acciones posibles por parte del docente es evaluar si la conjetura hecha por los estudiantes es o no una expresión de la forma “si... entonces...” que favorezca su demostración posterior, si corresponde con la observación hecha, si generaliza todos los casos observados, si tienen relación con el enunciado y la pregunta del problema, si faltan o sobran proposiciones.

### **Ejemplo de exploración y conjetura en una actividad propuesta en Álgebra I<sup>12</sup>:**

*A partir de la exploración con los números naturales, conjetura una propiedad matemática.*

*a) Los números  $2^2-1=3$ ,  $2^3-1=7$ ,  $2^5-1=31$ , son todos primos, ¿qué ocurre si tomamos un primo natural  $p$  y hacemos la operación  $2^p-1$ ?*

*b) ¿Qué ocurre con la operación  $2^n-1$ , si  $n$  es un número natural compuesto? ¿Es un número primo o compuesto?*

---

<sup>12</sup>Forma parte de la propuesta de mejora que retoma la actividad del ejemplo 1: Capítulo 5, actividad 4.

**Definir.** Este término engloba dos actividades importantes en la enseñanza experimental: formular definiciones organizando un subconjunto arbitrario de propiedades necesarias y suficientes de un concepto del cual otras propiedades de éste pueden ser deducidas, y usar definiciones en la producción de cadenas deductivas.

**En el siguiente ejercicio propuesto en Álgebra I se usa la definición de divisibilidad para poder analizar la validez de cada proposición matemática; corresponde a una de las primeras actividades propuestas en la secuencia didáctica<sup>13</sup>.**

*Sean  $a, b, c, d$  números enteros y  $d$  distinto de cero. Lee las siguientes afirmaciones y contesta todas las preguntas planteadas:*

*a)  $a \mid a$ .*

*b) Si  $d \mid a$  entonces  $-d \mid a$ .*

*c) Si  $d \mid a$  y  $d \mid b$  entonces  $d \mid a+b$ .*

*1) ¿Qué definición matemática atraviesa todas estas proposiciones matemáticas?*

*2) ¿Cuál es la estructura lógica que tiene cada una de estas proposiciones?*

**Argumentar.** Usamos el término argumentar en dos sentidos:

1. Durante la exploración, formulación y sociabilización de una conjetura, el término argumentar hace referencia a dar las razones o puntos de vista en pro o en contra de una afirmación con el objetivo de hacer aceptable un enunciado, establecer un cierto grado de certeza del mismo y postularse como candidato a ser demostrado. En este contexto la argumentación consiste en uno a más razones conectadas coherentemente, pero no necesariamente deductivamente. La pregunta que reina en este proceso es ¿por qué?

Dentro del armado de la conjetura y la argumentación de su valor de verdad se encuentran los ejemplos y contraejemplos. Los ejemplos en este caso permiten verificar

---

<sup>13</sup> Forma parte de la propuesta de mejora del Capítulo 5, actividad 1.

la proposición matemática enunciada partiendo de que cumplan la hipótesis. Si todos ellos cumplen la tesis, no podemos afirmar que la proposición es verdadera. En cambio, el contraejemplo es un caso particular de ejemplo que permite con uno solo afirmar que una proposición es falsa, ya que parte de verificar la hipótesis, pero contradice la tesis. Cabe mencionar en este punto que el contraejemplo no es la única manera de justificar que una propiedad es falsa, también puede usarse alguna propiedad. Por ejemplo, si  $2|a$  entonces  $a=2$  es una propiedad falsa, y uno puede argumentar que por definición  $a=2.k$ , es decir es un múltiplo de 2, no únicamente el 2.

2. En el proceso de creación de la demostración de una conjetura, el término argumentar hace referencia a dar las razones o puntos de vista, identificar los enunciados o proponer referentes teóricos, en pro de una afirmación, con el objetivo de buscar ideas que conformarán la demostración matemática del enunciado. En este contexto la argumentación consiste en uno o más argumentos expresados informalmente que se prevé pueden ser conectados deductivamente y donde el significado de los enunciados es crucial.

**Actividad matemática correspondiente a la propuesta de Álgebra I en donde se usa la argumentación para indicar la validez de una proposición matemática y para indicar para qué conjunto de valores la proposición es verdadera<sup>14</sup>.**

*Sea la siguiente afirmación matemática: Dados  $d, a, b$  enteros tales que  $d$  no es cero se tiene que:*

$$\text{Si } d|a.b \text{ entonces } d|a \text{ o } d|b.$$

- 1) *¿Qué puedes decir del valor de verdad de dicha afirmación?*
- 2) *Si es verdadera da una prueba formal para justificar dicha elección.*
- 3) *Si es falsa, ¿es posible decir para qué valores de  $d$  se cumple la propiedad? ¿Existe una restricción en dicha propiedad para que resulte verdadera? Enuncia claramente la*

---

<sup>14</sup> Forma parte de la propuesta de mejora del Capítulo 5, actividad 3.

*proposición matemática para que sea verdadera. Explica por qué podés afirmar que con esta restricción resulta verdadera. Dá una prueba formal para argumentar tu afirmación.*

**Demostrar.** Usamos el término “demostrar”, en relación al aspecto producto de la demostración, cuando la actividad consiste en organizar enunciados matemáticos conocidos, y que se asumen como válidos, en una cadena deductiva que lleva hasta un hecho que quiere validarse, con el objetivo de establecer y comunicar la validez del enunciado. Esta validez se logra estableciendo relaciones deductivas usando las proposiciones admitidas como verdaderas. Las proposiciones intervienen en la cadena deductiva según el rol que juegan en las inferencias que hacen. La conclusión de un paso es la condición inicial para el siguiente paso. Los enunciados que dan soporte a los pasos de deducción son explícitos ya que son clave en la cadena de transmisión de la validez del enunciado que se demuestra.

Para realizar esta acción el docente puede guiar al estudiante en actividades que permitan: resumir la información disponible y que puede usarse, presentar equivalencias a esos datos para una mayor comprensión del mismo, sugerir caminos hacia la demostración, hacer uso del lenguaje especializado, preguntar qué es lo que dice la tesis o una equivalencia del mismo, identificar cuáles son las condiciones a las que se arriban, determinar si la tesis es verdadera y establecer si están las condiciones suficientes para concluir la veracidad de la tesis.

**Actividad matemática propuesta en Álgebra I que permite la demostración matemática de la propiedad si  $p$  es primo tal que  $p|a \cdot b$  entonces  $p|a$  o  $p|b$ <sup>15</sup>.**

*1) Supongamos que tenemos un número entero cualquiera  $a$  y un primo  $p$ .*

*i) Si  $p$  es divisor de  $a$ , ¿Cuánto vale el máximo común divisor entre  $a$  y  $p$ , es decir  $(a:p)$ ?*

*ii) Si  $p$  no es divisor de  $a$ , ¿Cuánto vale el máximo común divisor entre  $a$  y  $p$ , es decir  $(a:p)$ ?*

---

<sup>15</sup> Forma parte de la propuesta de mejora del Capítulo 5, actividad 3.

*iii) Escribe una conclusión como una propiedad matemática.*

*2) Supongamos que  $p$  es primo y que  $p|a.b$ , ¿qué tiene que ocurrir para que la tesis sea verdadera? Para que el valor de verdad de la proposición “ $p|a$  o  $p|b$ ” sea verdadera, ¿cuál tiene que ser el valor de verdad de las proposiciones simples?*

*3) Como  $p$  es primo y  $a$  es entero, tenemos dos posibilidades que  $p|a$  o que  $p$  no sea divisor de  $a$ . Si  $p|a$ , entonces ¿cuál es el valor de verdad de la tesis?*

*4) Si en cambio  $p$  no es divisor de  $a$ , entonces ¿qué tenemos que demostrar para que la tesis sea verdadera?*

*5) Usando todo lo trabajado, realiza una prueba matemática para demostrar que la proposición es verdadera.*

**Sistematizar.** Hace referencia a la acción de organizar enunciados dados como ciertos, o que se han demostrado, de acuerdo a un conjunto de axiomas, definiciones y teoremas con el objeto de construir una teoría. Es importante tener presente la teoría de referencia en donde se encuentran los enunciados, ya que permite lograr el encadenamiento deductivo que da lugar a una demostración.

Esta acción no es objeto de este TFE, pero si es posible que luego de enseñar números enteros se haga una síntesis ordenada de definiciones y propiedades para confrontar con otro conjunto numérico en donde algunas propiedades no se cumplen necesariamente.

Existe un vínculo estrecho entre el proceso para llegar a la demostración y al producto final, y entre las acciones que componen la actividad demostrativa. Un hecho importante en el aprendizaje de la demostración es la articulación entre la exploración (las acciones de obtener y verificar resultados mediante la experimentación) y la justificación (las acciones que llevan a la organización deductiva de dichos resultados), en la cual los elementos descubiertos informalmente son reorganizados en enunciados válidos. Explorar y demostrar son complementarias, ya que la primera conduce a descubrir, mientras que la segunda conduce a confirmar (Hanna, 2000).

## **1.6 La demostración matemática como objeto de enseñanza**

En el campo de la matemática es fundamental tener en cuenta que la demostración no puede ser enseñada del mismo modo en un aula que en un ambiente puramente científico. Para convertirse en contenido de enseñanza, la matemática debe sufrir una transformación adaptativa, una *transposición didáctica* (Chevallard, 1991), bajo un conjunto de límites específicos del sistema didáctico.

Analicemos cómo se suelen enseñar las demostraciones y qué sentido encierran para los estudiantes.

Habitualmente el docente hace las demostraciones para toda la clase y luego les pide a los estudiantes que repitan la demostración, resultando la imitación el método de enseñanza. Dice Balacheff que “en tal proceso, el hecho de que la demostración sea una herramienta de prueba, una manera de validar un enunciado, está oculto bajo la concepción de la demostración como género del discurso, cuya base esencial es la estructura”. Esta forma de enseñanza dificulta el hecho de que los estudiantes experimenten la necesidad de demostrar ante un enunciado que se “les” representa como evidente. Para superar esta situación Chevallard y Tonelle (1982) sugieren ubicarse en el terreno mismo de la evidencia, partiendo de los argumentos de los estudiantes y conducirlos a una situación paradójica en la cual se vean obligados a volver analizar los enunciados y sus propias argumentaciones. Se trata de problematizar la evidencia, lo que se pone en tela de juicio es la racionalidad de los estudiantes; pensemos que antes de conocer la demostración disponían de otros medios (aceptados en cada contexto) para hacer matemática (Balacheff, 2000). Esta evidencia reemplaza aquella que Fischbein (1982) llama “creencia cognitiva”, y que describe de la siguiente manera: “tipo de convicción intrínseca e intuitiva directamente impuesta por la *estructura* de la situación misma”. La creencia cognitiva constituye por naturaleza un obstáculo fundamental al proceso de validación. No es posible superar este obstáculo sino a través de una evolución de los conocimientos de los estudiantes.

Una vez superado el obstáculo de la evidencia se presenta el obstáculo del sistema didáctico. En general en la enseñanza se libera al estudiante de la responsabilidad de la verdad de los enunciados. Particularmente si se tienen en cuenta que las actividades que en general se les proponen son del tipo: “mostrar que...”. Se da por sentado la verdad de la afirmación y lo que queda por realizar es la demostración.

La demostración que pueden proponer los estudiantes puede ser confusa, incompleta, insuficiente sin que por ello sea falsa, ya que es muy difícil explicitar los criterios para la elaboración de una demostración. Pero si no se tienen en cuenta las producciones de los estudiantes se termina imponiendo la demostración del profesor. Puede entonces generarse una diferencia importante entre la convicción del estudiante respecto a la validez de una solución que él mismo produce y la que produce el profesor (Balacheff, 1982).

A manera de síntesis podemos decir que para que la demostración tenga sentido para los estudiantes es necesario que se les presente como una herramienta eficaz y confiable para establecer la validez de una proposición. Para conseguirlo, debemos descubrir y tener en cuenta las ideas previas (racionalidad en términos de Balacheff) saber cómo funcionan y cómo pueden evolucionar; porque es a partir de ellas en pro o en contra de ella, es que los estudiantes construirán el sentido de la demostración.

El paso siguiente es la construcción de situaciones didácticas que aseguren la transferencia de la responsabilidad de la verdad a los estudiantes. En palabras del propio Brousseau (1986): “la didáctica se encuentra ante el desafío de producir situaciones que permitan al estudiante poner en ejecución los saberes y los conocimientos matemáticos como medio efectivo para convencer (y convencerse), llevándolo a rechazar los medios retóricos, que no son buenas pruebas ni refutaciones”.

### **1.7 Modelo metodológico para el abordaje de la demostración matemática**

Para demostrar un teorema o una propiedad matemática no hay recetas generalizables ya que cada una que se presenta es una situación nueva, pero existen algunos lineamientos a

seguir que se pueden explicitar mediante un método a aplicar en diferentes situaciones. Con este propósito D'Andrea (2000) propone un modelo didáctico para lograr un aprendizaje significativo, comprensivo y constructivo para el abordaje por parte del estudiante de la demostración matemática. Esta propuesta metodológica se basa en tres investigadores:

- 1) Leron (1983): propone un método estructural para la demostración. La idea es presentar las demostraciones en el aula en diferentes niveles de gradualidad, procediendo desde las ideas elementales de la prueba hasta su conclusión, de manera escalonada y fragmentada. A diferencia de la prueba tradicional que se desarrolla desde la hipótesis a la tesis, la prueba estructural se desarrolla como diagrama de flujo, focalizando determinadas partes de la prueba para hacerla más comprensible.
- 2) Solow (1992): Partiendo de la base de que A es todo aquello que se propone como verdadero (la hipótesis) y que B es todo lo que se está demostrando (la tesis), Solow explica que cuando se busca determinar cómo llegar a la conclusión de que B es verdadero, se está realizando un *proceso regresivo*, y cuando se hace uso específico de la información contenida en A, se está haciendo uso del *proceso progresivo*. Se comienza haciendo una caracterización detallada del producto a conseguir y luego se piensa en el método necesario para alcanzarlo (se piensa de adelante para atrás, con el fin de que todos los pasos dispuestos sean suficientes y necesarios para alcanzar el producto final). Los pasos que propone son:
  - a) Realizar la pregunta de abstracción: "¿cómo o cuándo puedo concluir que la proposición B es verdadera?".
  - b) Contestar correctamente la pregunta:
    - i) dar una respuesta abstracta que explique lógicamente y verbalmente cómo podría demostrar que B es verdadero sin hacer uso de símbolos, datos o notaciones matemáticas.

ii) aplicar la respuesta abstracta a la situación específica, usando los datos, símbolos o notaciones que sean necesarios para obtener una respuesta específica. Esta respuesta proporciona una nueva proposición B1, con la que, si se pudiese demostrar B1, se demuestra B.

iii) contestar la pregunta abstracta, pero usando B1. Repetir este proceso las veces que sea necesario.

c) Hacer uso del *proceso progresivo* para derivar algorítmicamente proposiciones de A (A1, A2, A3) que permitan llegar a proposiciones de las que B se deriva.

i) Identificar la proposición A que se supone verdadera.

ii) Obtener proposiciones derivadas de A, partiendo de teoremas e integración de proposiciones anteriores.

iii) Escoger una de las proposiciones derivadas de A, que permita ayudar a comprobar B.

3) Bravo y Arrieta (2003) proponen un sistema de acciones para la enseñanza de la demostración en geometría: modelar geoméricamente el problema, identificar hipótesis y tesis, reformular el problema, seleccionar el método de demostración, recopilar información, presentar el plan de demostración y materializar dicho plan, y analizar los resultados según las distintas vías de solución.

El modelo propuesto por D'Andrea consiste de una serie de estrategias didácticas mostradas como una secuencia de tareas y tiene en cuenta las tres facetas del lenguaje matemático: el coloquial (que se expresa a través del lenguaje hablado), el visual (que se expresa a través de un diagrama) y el simbólico (con el uso de la lógica matemática). D'Andrea aclara que, si bien la secuencia de tareas parece conductista, su aplicación en el aula mediado por el docente, puede conducir a una actitud constructivista del estudiante, ya que permite generar la habilidad de demostrar. Muchas veces, resulta que lo más importante previamente a la tarea de demostrar, es la comprensión del enunciado y la utilización del mismo. Tiene que estar claro que se quiere probar y cuáles son los datos

que se pueden usar. Como consecuencia de la comprensión de la proposición, desde el lenguaje coloquial, el acceso al lenguaje simbólico se simplifica.

A continuación, presentamos la secuencia de tareas a seguir para la presentación de una proposición matemática verdadera propuesta por D' Andrea, con algunas reflexiones a la que le incorporamos la experiencia de nuestro trabajo en el aula:

- 1) **Comprensión y apropiación del lenguaje matemático.** El docente debe diseñar, seleccionar estrategias y material didáctico que apunte a un aprendizaje constructivo y comprensivo, permitiendo el acceso, la comprensión y apropiación del lenguaje matemático. Estas actividades deben incluir: la utilización de conectores lógicos, las condiciones explícitas e implícitas que pueden encontrarse en un condicional y los métodos de demostración de implicaciones.

En este TFE proponemos y analizamos actividades en distintos lenguajes matemáticos: el coloquial y el simbólico, mostrando el pasaje de una a otro, sus ventajas y limitaciones. Como además queremos que estas actividades se puedan trabajar tanto en la presencialidad como en la virtualidad, las presentamos en forma secuenciada a través de preguntas reflexivas que guíen al estudiante a la solución de lo que plantea la actividad. Las actividades deben estar contextualizadas con ejemplos matemáticos relacionados con el tema que se está estudiando. Se los puede invitar a la lectura de textos especializados y de proposiciones conocidas para que observen que el lenguaje simbólico forma parte de la manera en que se presentan los enunciados en matemática.

- 2) **Presentación del teorema o proposición a demostrar.** Se presenta al estudiante la propiedad en su estructura formal.
- 3) **Interpretación coloquial.** Se propone al estudiante que intente explicar coloquialmente la propiedad presentada en el ítem 2).

Esta explicación puede ser en distintos niveles: desde su estructura lógica identificando conectores y las partes de la propiedad (hipótesis, tesis y condicional), y desde su significado matemático. Algunas preguntas que motivan este apartado son:

¿qué quiere mostrar dicha propiedad? ¿cuál es la hipótesis que presenta? ¿cuál es la tesis? ¿en qué teoría matemática dicha propiedad se fundamenta? ¿qué ventaja tiene el enunciado de dicha propiedad? ¿para qué es útil usarlo?, entre otras.

4) **Verificación.** En esta etapa D' Andrea propone generar mínimamente dos ejemplos que cumplan la hipótesis.

Agregamos que sería pertinente que el docente pregunte: ¿qué ejemplos se pueden generar para que verifiquen la propiedad?, ¿estos ejemplos tienen que cumplir la hipótesis? ¿qué ocurre si el ejemplo no cumple la tesis? ¿son ejemplos aquellos que no cumplen la hipótesis?

5) **Visualización.** El estudiante nuevamente es instado por el docente, pero esta vez a visualizar la proposición a demostrar.

Como las proposiciones tratadas en este TFE no son geométricas, en este punto la visualización puede tratarse de un esquema visual o una secuencia de lo que expresa conceptualmente el teorema.

6) **Simbolización.** Luego de la explicación coloquial, la verificación y la visualización, debe retomarse la estructura formal de la proposición a demostrar.

Queremos aclarar que muchos teoremas en matemática, están escritos con lenguaje simbólico y coloquial a la vez. Por ejemplo, si “ $a$  es un entero par entonces  $2|a$ ” o también, “Si  $p$  es primo tal que  $p|a \cdot b$  entonces  $p|a$  o  $p|b$ ”. A través de preguntas podemos pedir a los estudiantes que identifiquen las partes con lenguaje simbólico y las partes con lenguaje coloquial, y los escriban en todos los lenguajes posibles, y que expliquen qué significa estas partes y qué definiciones matemáticas se requieren para enunciarlos y qué conectores lógicos se necesitan para unir sus partes.

7) **Elementos vitales de la proposición.** En esta etapa el estudiante debe identificar la hipótesis, las hipótesis implícitas y la tesis a demostrar.

Es importante que el estudiante identifique las proposiciones que componen la hipótesis y la tesis: si son simples o compuestas, y si alguna es compuesta cuál o

cuáles son los conectores que la unen. Se pueden generar actividades donde expliciten cuáles son todos los datos que se pueden usar y no necesitan demostración, y que después se puede recurrir a usarlos, y cuáles son todas las proposiciones matemáticas que se quieren demostrar, detallando punto por punto si hay más de una.

8) **Contenidos implícitos de la proposición.** En esta etapa el estudiante deberá identificar qué estructuras conceptuales están implícitas en la proposición a demostrar.

Agregamos que estas hipótesis pueden ser definiciones previas o teoremas ya demostrados. Es importante situar al estudiante en qué contenido matemático la proposición se inserta, si esta proposición está a continuación de una definición o ya fueron enunciadas otras proposiciones, si forma parte de una consecuencia de un teorema, si es un teorema, un lema o una propiedad.

9) **Abstracción.** En esta etapa, el docente guía al estudiante en la formulación de la clásica pregunta de abstracción postulada por Solow (1993) en su método regresivo-progresivo. Esta pregunta debe ser formulada al grupo de estudiantes con el objetivo de generar discusión y planteos personales.

10) **Guía secuenciada de la demostración.** Es una serie de instrucciones que contemplan el paso a paso de la prueba en cuestión, a la manera del método estructural sugerido por Leron. Esta guía permite observar la demostración una vez realizada desde una perspectiva global hacia perspectivas más focalizadas.

Si la proposición no es muy compleja se los invita a realizar la demostración con esta guía secuenciada. En cambio, si la demostración es complicada, se invita al docente a realizar la demostración y al finalizarla que el estudiante intente reproducirla con la guía secuenciada antes descripta o que el mismo genere una, o que elabore preguntas relacionadas a la argumentación que conduce a la prueba. Esta serie de preguntas también pueden ser un disparador inicial para el estudiante a los efectos de la construcción del razonamiento que constituye la prueba. Esta guía secuenciada puede

presentarse tanto para la demostración de una propiedad como así también para la lectura comprensiva de una demostración ya realizada.

La propuesta de mejora que se encuentra en el Capítulo 5 de este TFE se basa en la propuesta de D'Andrea con algunas modificaciones. En la secuencia didáctica no usamos una guía secuenciada de pasos como sigue: “Escriba la hipótesis, use la definición tal, argumente por qué tal cosa, etc”. Sino, inspirándonos en la guía secuenciada de la demostración, proponemos para la lectura y aplicación de un teorema o demostración (Parte 2 de la secuencia didáctica) una guía de preguntas que permite la reflexión detallada de cada uno de los pasos de la demostración en distintos niveles: el lógico y el matemático, como así también en su reflexión global del enunciado del teorema y su demostración. Por otro lado, para las acciones propias de la actividad demostrativa (Parte 1 de la secuencia didáctica) proponemos preguntas que guían la demostración de una propiedad, éstas se encuentran en las intervenciones del docente para la realización de la actividad o en la puesta en común donde se trabaja con las distintas soluciones por parte de los estudiantes. Por último, incluimos una actividad donde el estudiante debe aplicar una propiedad o su demostración.

## **Capítulo 2. Escenario: tiempo y espacio**

En este capítulo brindamos una descripción de la UNAHUR, del Profesorado Universitario de Matemática y las materias Introducción a la Matemática y Álgebra I; escenario en donde se inscribe el análisis y la propuesta de mejora que forma parte de este TFE.

### **2.1 Caracterización de la UNAHUR**

La Universidad Nacional de Hurlingham es una de las universidades que conforman el sistema público no arancelado de la Argentina. Fue creada por la Ley 27.016 del Congreso Nacional, aprobada en noviembre de 2014 y promulgada el 2 de diciembre de ese año. Comenzó su primer ciclo lectivo en 2016, siguiendo los objetivos de contribuir al desarrollo local y nacional por medio de la producción y distribución equitativa de conocimientos e innovaciones científico-tecnológicas, con un fuerte compromiso con la formación de excelencia y la inclusión.

La oferta académica fue elegida atendiendo a las particularidades de la población, al entramado productivo local y regional y a las características de las instituciones educativas de todos los niveles de la zona de influencia. La docencia, la investigación, la extensión y los servicios a la comunidad se constituyeron en las funciones básicas de la UNAHUR, con el doble objetivo de posibilitar el acceso a la educación superior e impactar en el medio a través de la formación de profesionales y el fomento de la investigación y la extensión.

La oferta académica está organizada en cuatro áreas específicas: Educación, Salud Comunitaria, Ingeniería y Biotecnología, que tienen su correlato en institutos. El Instituto de Educación tiene dos funciones centrales: la formación de especialistas en el área y la formación de docentes para el nivel secundario y universitario. Respecto de la primera ofrece la licenciatura y maestría en Educación y la Especialización en Docencia Universitaria que tienen como objetivo formar profesionales capaces de abordar problemas y desafíos educativos de la sociedad argentina. La segunda función de este instituto surge como respuesta a la expansión de la matrícula tras la obligatoriedad del nivel secundario con la sanción de la Ley de Educación Nacional; así como a la ausencia de institutos de formación en la zona. Para ello ofrece, los profesorado universitarios en Biología, Educación Física, Inglés, Letras y Matemática.

## **2.2 Caracterización del Profesorado Universitario de Matemática**

El Profesorado Universitario de Matemática pertenece al Instituto de Educación de la UNAHUR. Tiene una duración de 4 años con una carga horaria total de 2960 horas reloj.

La carrera tiene por objetivo formar a profesores de matemática con capacidad para desempeñarse tanto en contextos institucionales como en proyectos de educación no formal.

Los graduados de este profesorado serán personas con sólida capacidad para la elaboración, implementación, evaluación y seguimiento responsable de proyectos de enseñanza y aprendizaje vinculados a la matemática y sus aplicaciones a las ciencias naturales, sociales y a la ingeniería. Tendrán clara comprensión acerca de la importancia de la formación matemática en áreas profesionales de vacancia.

El docente estará capacitado para actuar en los niveles secundario y superior del sistema educativo, contando con una formación integral fundamentada en marcos teóricos actualizados, que contemple tanto los aspectos disciplinarios específicos de la matemática y su didáctica, como los elementos socio-culturales, históricos, jurídicos e institucionales vinculados a la actividad docente.

La carrera está conformada por cuatro campos de formación que se complementan y articulan:

- **Campo de Formación Común (CFC):** Todas las carreras de la UNAHUR comparten este campo y se refiere a un conjunto de 6 asignaturas obligatorias que se dictan en todas las carreras.
- **Campo de Formación Básica (CFB):** Este campo de formación general en educación está conformado por un conjunto de 8 asignaturas. Durante este recorrido de formación se plantea realizar un abordaje de los contenidos principales de la carrera, entre ellas la dimensión político-pedagógica de los sujetos e instituciones de la educación, el marco político educativo argentino, las distintas pedagogías y el currículum, desde una perspectiva latinoamericana.
- **Campo de Formación Específica (CFE):** Está conformado por 18 asignaturas. Este campo involucra los saberes necesarios referidos a la formación en matemática para el desarrollo de la práctica docente. Incluye la formación en las áreas clásicas de análisis, álgebra y geometría, con particular énfasis en su vinculación concreta con las currículas de la escuela secundaria y la creciente

presencia de las nuevas tecnologías de información y comunicación como herramientas de trabajo cotidiano. Asimismo, este campo abarca la contextualización social e histórica de la disciplina y sus aportes como lenguaje natural de las ciencias naturales y de la ingeniería.

- **Campo de integración curricular (CIC):** Está conformado por 6 asignaturas. Este campo está orientado a la incorporación de saberes vinculados a la matemática y su enseñanza, a través de la experiencia activa.

En este escenario, Introducción a la Matemática y Álgebra I forman parte del CFE del Profesorado Universitario de Matemática y pertenecen al primer año de la carrera.

## **2.3 Introducción a la Matemática**

### **2.3.1. Caracterización**

La materia Introducción a la Matemática es la primera matemática que aparece en el programa del Profesorado Universitario de Matemática. Forma parte del CFE, pertenece al primer cuatrimestre del primer año y tiene una carga horaria de ocho horas semanales lo que constituye un total de 128 horas reloj de cursada en un cuatrimestre.

El objetivo central de la materia es la recuperación y profundización de los contenidos matemáticos estudiados en la escuela secundaria, que sirvan de base para el estudio posterior del álgebra, del análisis matemático y la geometría. Se profundiza a lo largo de todo su desarrollo y de manera transversal el trabajo con los distintos tipos de lenguajes matemáticos: coloquial, simbólico, gráfico y algebraicos. Se incorporan las formas que adquiere el pensamiento matemático.

Los contenidos de la materia son:

#### **1. Lógica y conjuntos**

La lógica. Conceptos básicos de lógica: proposiciones y funciones proposicionales. Principio del tercero excluido. Tablas de verdad. Negación. Conjunción. Negación. Cuantificadores. El condicional. El bicondicional. Tautologías. Contradicción. Leyes lógicas: idempotencia, asociatividad, conmutatividad. Ley de De Morgan. Paradojas.

Conjuntos: entes primitivos. Operaciones con conjuntos. La inclusión. La demostración. Conjeturas, axiomas y teoremas. Hipótesis, tesis y demostración. Teoremas directos y recíprocos. Tipos de teoremas.

## **2. Conjuntos numéricos**

El conjunto de los números Naturales y Enteros. Características y uso social del número. Sistema de numeración posicional. Símbolos numéricos. Relación de orden. Relación de Equivalencia. Ejemplos de relaciones de equivalencia y de orden. Representación geométrica. Operaciones y propiedades. División entera. Algoritmo de la división. Divisibilidad. Números primos y compuestos. Descomposición en factores primos. Múltiplos y Divisores. Múltiplo común mínimo y Divisor común máximo.

La demostración: argumentación y validación del conocimiento matemático. Métodos de demostración.

## **3. Números racionales**

Definición de razón. El número racional. Uso social. Concepto de densidad. Tensiones con el conjunto de los números enteros que obstaculizan las operaciones y el tratamiento de la fracción como número. Representación geométrica y en la recta numérica. Fracciones mayores y menores que la unidad. La escritura decimal. Pasajes. Porcentaje. La fracción como medida de la probabilidad de un suceso. Operaciones y propiedades.

## **4. Expresiones algebraicas**

Expresiones algebraicas enteras. Orden de procedencia de las operaciones. Monomio. Polinomios. Operaciones. Propiedades. Casos notables: diferencia de cuadrados. Trinomio cuadrado perfecto. Cuatrinomio cubo perfecto. Casos de factorización: su enseñanza geométrica.

## **5. Ecuaciones**

Ecuaciones lineales. Ecuaciones equivalentes. Sistemas de ecuaciones lineales en dos y tres variables. Métodos básicos de resolución. Inecuaciones. Propiedades. Representación gráfica. Valor absoluto. Ecuaciones e inecuaciones con valor

absoluto. Sistemas de inecuaciones lineales en dos variables. Representación gráfica. Geogebra.

## **6. Funciones**

Noción de variabilidad, variables dependiente e independiente. Funciones definidas a través de tablas o fórmulas. Funciones definidas en el conjunto de los números reales. Dominio e imagen. Imagen y preimagen de un elemento. Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, raíces, intervalos de positividad y negatividad.

## **7. Funciones lineales y cuadráticas.**

Función lineal y ecuación de la recta. Variación uniforme.

Funciones de proporcionalidad directa y funciones lineales. Estudio de la función lineal: Análisis de los parámetros de la fórmula, conjuntos de positividad y negatividad. Paralelismo y perpendicularidad. Intersección entre rectas. Diferentes registros de representación. Función cuadrática. Análisis de la simetría de su gráfico: fórmula canónica. Análisis de los parámetros de la fórmula. Vértice, eje de simetría, imagen de la función. Raíces: fórmula factorizada. Conjuntos de positividad y negatividad. Ordenada al origen y concavidad: fórmula desarrollada. Diferentes registros de representación. Modelización. Uso del GeoGebra.

## **8. Funciones exponencial y logarítmica**

Función exponencial. Análisis de los parámetros de la fórmula. Propiedades. Crecimiento, ceros, ordenada al origen, ecuación de la asíntota horizontal. Noción de función inversa, composición de funciones, inyectividad y sobreyectividad.

Función logarítmica como inversa de la exponencial. Análisis de los parámetros de la fórmula. Propiedades. Crecimiento, ceros, ordenada al origen, ecuación de la asíntota vertical. Modelización. Geogebra.

Entre la bibliografía que usamos en la materia, además de los apuntes de clase y el aula virtual se encuentran:

**Graña, M., Jerónimo, G, Pacetti, A., Janca, A. y Petrovich A.** (2016). *Los números de los naturales a los complejos*. Ministerio de Educación. Colección: Las ciencias naturales y la matemática.

**Krick, T.** (2017) *Apuntes de Álgebra I*. (Cap. 1) Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

**Plaza E. y Sirne R.** (2014). *Matemática de pregrado para ingeniería*. Facultad de Ingeniería. Eudeba; Buenos Aires.

**Stewart J, Redlin L, Watson S.** (2012). *Precálculo. Matemática para el cálculo*. Sexta edición. Ceacage y Learning; México.

### **2.3.2 La demostración matemática y su ubicación en el programa**

Como se puede observar en los contenidos de Introducción a la Matemática arriba detallado, las cuestiones relativas a la demostración como objeto de enseñanza, se encuentra a continuación del desarrollo de los siguientes núcleos temáticos: tipos de razonamiento matemático; lógica y conjuntos; conjuntos numéricos y divisibilidad. La idea central de esta unidad es iniciar la reflexión y un acercamiento de la forma en que se validan los procesos de producción y de generación/aceptación de nuevos conocimientos matemáticos. Para que esto sea posible se propone la lectura comprensiva de demostraciones con método directo y por el absurdo, entre otras actividades.

Cabe señalar que en la unidad de conjuntos numéricos se trabaja primero con las propiedades de números, desde una concepción instrumental, y en segundo lugar se retoman esas propiedades, centrando la mirada en sus procesos de producción, argumentación y validación. Con el objeto de iniciar el camino a la comprensión de las argumentaciones lógico--matemáticas que serán el método usado en el desarrollo de Álgebra I.

Finalmente, recordar que como lo hemos mencionado en varias ocasiones a lo largo de este TFE, no pretendemos que nuestros estudiantes reproduzcan demostraciones de otros, sino que puedan apropiarse de algunas herramientas básicas que les permitan comenzar a

ensayar sus propias argumentaciones, incompletas seguramente, pero genuinas y perfectibles.

## 2.4 Álgebra I

### 2.4.1 Caracterización

La asignatura Álgebra I pertenece al primer año del Profesorado Universitario de Matemática. Está enmarcada en el CFE y se encuentra en el segundo cuatrimestre del primer año de la carrera, siendo correlativa a Introducción a la Matemática. Tiene una cantidad de horas reloj de 6 horas semanales con un total de 96 horas reloj. La misión que tiene es proporcionar ciertas herramientas del Álgebra necesarias para desarrollarse profesionalmente.

Esta materia atraviesa dos ramas de la matemática: una mayor parte de ella se refiere a los números (naturales, enteros y complejos) y los polinomios; sus estructuras y aplicaciones, y cuáles son las herramientas que se utilizan en cada uno de estos conjuntos numéricos; y otra parte se refiere a uno de los conceptos fundamentales del Álgebra Lineal: la modelización de determinadas situaciones a través de los sistemas de ecuaciones lineales, sus soluciones en los reales o los complejos y las técnicas de cómo encontrarlas.

Los contenidos de la materia se dividen en las siguientes cinco unidades:

1. **Números naturales.** Problemas de aritmética. Definición intuitiva de los números naturales. Divisibilidad y algoritmo de división. Principio de inducción simple e inducción global.
2. **Números enteros.** Divisibilidad y propiedades. Algoritmo de división en los enteros. Noción de número primo y compuesto. Noción de congruencia y criterios de divisibilidad. Máximo común divisor y algoritmo de Euclides. Identidad de Bezout. Mínimo común múltiplo. Teorema Fundamental de la Aritmética. Ecuaciones diofánticas. Pequeño Teorema de Fermat.

3. **Sistemas de ecuaciones lineales.** Modelización con sistemas de ecuaciones lineales. La solución de un sistema de ecuaciones lineales y los tipos de solución. Métodos de resolución de sistemas lineales. Operaciones elementales.

4. **Números complejos.** Representación binómica de los números complejos. Unidad imaginaria. Representación geométrica de los números complejos. El plano complejo. Módulo. Complejo conjugado. Argumento o fase. Representación polar y operaciones. Raíces de números complejos y su representación gráfica. Fórmulas de deMoivre. El cuerpo de los números complejos.

5. **Polinomios.** Grado de un polinomio. Operaciones con polinomios. Divisibilidad. Regla de Ruffini. Teorema del resto. Raíces de un polinomio. Ecuación de segundo grado en una variable. Resolvente cuadrática y discriminante. Ecuaciones reducibles a cuadráticas. Factorización. Teorema de Gauss para polinomios con coeficientes enteros. Teorema fundamental del Álgebra. Raíces múltiples.

Los contenidos y los modos de trabajo retoman lo trabajado en Introducción a la Matemática y permiten al estudiante ir avanzando en el desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico con cierta rigurosidad. Otorga las herramientas básicas para plantear un modelo matemático que describa en forma exacta, o con adecuada aproximación y razonable simplicidad, un problema del mundo real y su solución, constituyendo la base sobre la cual se desarrollan las siguientes materias del Profesorado Universitario de Matemática.

Entre la bibliografía que usamos en la materia, además de los apuntes de clase y el aula virtual se encuentran:

**Lay, David C.** (2007) Álgebra Lineal y aplicaciones. Pearson Addison Wesley, México.

**Graña, M., Jerónimo, G, Pacetti, A., Janca, A. y Petrovich A.** (2016). *Los números de los naturales a los complejos*. Ministerio de Educación. Colección: Las ciencias naturales y la matemática.

**Krick, T.** (2017) *Apuntes de Álgebra I*. Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

**Kolman, B. y Hill D.** (2006) *Álgebra Lineal* (8va. ed.). Pearson Education, Inc, México.

#### **2.4.2 La demostración matemática y su ubicación en el programa**

A lo largo de toda la materia, ponemos el foco en la demostración como proceso más que como producto final, haciendo hincapié en las actividades demostrativas. Estas actividades previas a la demostración matemática como explorar, conjeturar, argumentar y determinar la validez de una proposición son procesos propios de la construcción del Álgebra. Por lo tanto, la lectura comprensiva de una propiedad o una demostración, son habilidades intrínsecas al desarrollo del Álgebra y constituye la totalidad de la propuesta de enseñanza de toda la materia. A medida que avanza la profundidad de los contenidos también lo hace su complejidad y el interés de las demostraciones, ya que constituyen una herramienta para facilitar la resolución de problemas.

## **Capítulo 3. Preparando el Análisis**

En el siguiente capítulo explicitamos las categorías de análisis y las fuentes de información que nos permiten estudiar la demostración matemática y su enseñanza

aplicada a los números enteros, de manera articulada con Introducción a la Matemática y Álgebra I.

### **3.1 Dimensiones de la demostración matemática y su enseñanza: sus categorías de análisis**

**Dimensión 1:** La enseñanza de la demostración en las primeras matemáticas de la universidad aplicada a números enteros.

**Dimensión 2:** Articulación de la demostración matemática en Introducción a la Matemática y Álgebra I.

Estas dimensiones son analizadas a través de las siguientes categorías:

- C1: Tipos de actividad demostrativa propuestas previas a la demostración.

La actividad demostrativa como conjunto de actividades que apoyan e impulsan la producción de la demostración (Camargo, 2010) que utilizamos son: explorar, conjeturar, definir, argumentar, demostrar y sistematizar. Estas actividades facilitan la comprensión de las demostraciones y amplían la mirada sobre la resolución de problemas, que es la estrategia por excelencia de la enseñanza de la matemática.

- C2: Estructura de las propiedades matemáticas y los tipos de demostraciones.

Cuando se proponen ejercicios de argumentación en matemática, generalmente suelen tener enunciados del tipo: "demostrar que...", "mostrar que...", con la certeza de la veracidad del enunciado. Incorporamos en la propuesta de este TFE enunciados que no necesariamente son verdaderos, permitiendo la conjetura de propiedades y la argumentación en tal sentido. Estas son habilidades matemáticas tan importantes como el contenido a enseñar; más aún constituyen un contenido matemático en sí mismo, en tanto tal, debe ser explicitado.

Ibañes y Ortega (1997) proponen para el desarrollo de los enunciados anteriores una clasificación de las proposiciones según su estructura lógica (tipos), según los procedimientos lógicos (métodos), según los procedimientos matemáticos (estilos) y según el procedimiento de exposición (los modos)<sup>16</sup>. Analizaremos los enunciados y actividades propuestas en las aulas virtuales de Álgebra I e Introducción a la Matemática usando esta clasificación.

- C3: Las funciones de la demostración matemática y su enseñanza.

El sentido profundo de trabajar la demostración matemática en el aula es lograr la autonomía de los estudiantes mediante la lectura, la comprensión, la validación y /o refutación de las argumentaciones propias y ajenas.

de Villiers (1993) presenta un modelo en el que se evidencian las funciones de las demostraciones que son: verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación<sup>17</sup>. Utilizaremos este modelo para analizar las funciones que tiene la demostración y sus actividades relacionadas en el trabajo desarrollado en el período 2020.

- C4: Discusión acerca de los modos de enseñar la demostración

Habitualmente el docente expone las demostraciones para la clase y posteriormente solicita a los estudiantes que solo la repitan sin mediar ninguna estrategia de apropiación. En palabras de Maggio (2018) este tipo de clase universitaria está perdiendo sentido y se pregunta “¿por qué seguimos enseñando de la misma manera? (...) ¿Por qué insistimos en enseñar el conocimiento acumulado si sabemos que lo más importante es el que seremos capaces de construir?”

---

<sup>16</sup> Sección 1.4 del Capítulo 1.

<sup>17</sup> Sección 1.3 del Capítulo 1.

Balacheff (1982, 2000) propone que para que la demostración tenga sentido para los estudiantes se deben contemplar sus ideas previas, que, aunque éstas sean incompletas son perfectibles y los ayuda en el camino de la validación de sus propias argumentaciones. En este punto, analizaremos qué propuestas presentamos para la enseñanza de la demostración matemática aplicada a los números enteros.

### 3.2 Fuentes de información

Para el análisis que prosigue en el Capítulo 4, partimos de las siguientes fuentes:

- I. Lectura y análisis de tesis doctorales y de maestría (Recio, 1999; D’Andrea, 2010; Camargo, 2010) y trabajos de investigación relativos a la demostración matemática y las problemáticas en torno a su enseñanza en la universidad (Solow, 1992; de Villiers, 1993; Ibañes y Ortega, 1997; Balacheff, 2000; Godino y Recio, 2001). El desarrollo está detallado en el Capítulo 1.
- II. Recorrido por el Aula virtual de Álgebra I indicando algunas actividades demostrativas que fueron trabajadas en el ciclo académico 2020. Seleccionamos para el análisis que se encuentra en el Capítulo 4 los siguientes puntos:
  - las presentaciones con los contenidos teóricos previos para trabajar en cada encuentro de las Clases 3, 5 y 6 referidas a números enteros: divisibilidad, primos y compuestos y ecuaciones diofánticas.

<p>④ Dividí 75 por 12 restando sucesivamente 12 de 75 e indicá el cociente y el resto de la misma. Mostrá que la condición impuesta sobre el resto conlleva la unicidad del resto y del cociente.</p> $75 - 12 = 63$ $63 - 12 = 51$ $51 - 12 = 39$ $39 - 12 = 27$ $27 - 12 = 15$ $15 - 12 = 3$ <p>Luego, <math>75 - 6 \cdot 12 = 3</math>, es decir <math>75 = \underbrace{6}_{\text{cociente}} \cdot 12 + \underbrace{3}_{\text{resto}}</math>. Dicho de otra manera, 12 entra 6 veces en 75 y me sobran 3. Notemos que el resto <math>r = 3</math> es menor que el divisor <math>d = 12</math> y además <math>r \geq 0</math>.</p>	<p>④ Calculá el resto y el cociente de la división de 76 por 57 y de 125 por 214.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>76 = \underbrace{1}_{\text{cociente}} \cdot 57 + \underbrace{19}_{\text{resto}}</math></li> <li>• <math>125 = \underbrace{0}_{\text{cociente}} \cdot 214 + \underbrace{125}_{\text{resto}}</math></li> </ul> <p>④ Calculá el resto y cociente de la división de <math>a</math> por <math>b</math> cuando <math>b</math> es mayor que <math>a</math>. Verificá que son únicos. En este caso nos queda que <math>a = 0 \cdot b + a</math>, donde <math>a &lt; b</math>. Si <math>a &gt; b</math>, en este caso <math>a</math> es el dividendo, el que va a ser dividido; y <math>b</math> el que va a dividir al anterior, el divisor. Lo que hacemos es comenzar a restar sucesivamente el divisor del dividendo, calculando en cada paso un resto.</p> $a - b = r_1$ $r_1 - b = r_2$ $r_2 - b = r_3$ $\vdots$ $r_{n-1} - b = r_n, \text{ con } 0 \leq r_n < b.$
--	--

#### Encuentro sincrónico sobre el algoritmo de división

En las clases anteriores estuvimos trabajando con el Teorema de Bézout, el cuál nos dice que dados  $a, b \in \mathbb{Z}$  no nulos, existen  $x, y \in \mathbb{Z}$  tales que

$$a \cdot x + b \cdot y = (a : b)$$

Por ejemplo, como  $(20 : 16) = 4$  tenemos que:

$$4 = 20 \cdot 1 + 16 \cdot (-1)$$

Tambien

$$4 = 20 \cdot 5 + 16 \cdot (-6)$$

y tambien

$$4 = 20 \cdot (-3) + 16 \cdot (4)$$

Podemos intuir que existen infinitos enteros  $x$  e  $y$  que satisfacen la ecuación  $4 = 20 \cdot x + 16 \cdot y$ .

Nos interesa determinar:

- ¿Cuándo este tipo de ecuaciones no tiene soluciones enteras?
- Si este tipo de ecuaciones tiene solución, ¿Cómo determinar todas sus soluciones?

### Preguntas trabajadas en un encuentro sincrónico sobre ecuaciones diofánticas

Para tratar de determinar estas cantidades, Martín observa que:

- si no hubiera vendido ningún bono de \$15, los \$100 provendrían de vender bonos de \$8: si vendió una cantidad  $y$  de bonos de \$8 sería  $\$100 = \$8 \cdot y$ , (no puede ser porque 100 no es múltiplo de 8).
- Si hubiera vendido un solo bono de \$15, entonces los  $\$100 - \$15 = \$85$  restantes provendrían de vender bonos de \$8, pero 85 no es múltiplo de 8;
- si hubiera vendido 2 bonos de \$15 pesos, los  $\$100 - 2 \cdot \$15 = \$70$  restantes provendrían de vender bonos de \$8, pero 70 no es múltiplo de 8;
- no puede ser que haya vendido 3 bonos de \$15, porque  $\$100 - 3 \cdot \$15 = \$55$  y 55 tampoco es múltiplo de 8;
- es posible que haya vendido 4 bonos de \$15, ya que  $\$100 - 4 \cdot \$15 = \$40 = 5 \cdot \$8$ . Esto significa que además habría vendido 5 bonos de 8;
- razonando de la misma manera deduce que no puede ser que haya vendido ni 5 ni 6 bonos de \$15. Además, seguro que no vendió más de 7 de estos bonos, pues  $7 \cdot \$15 = \$105$  y sólo recaudó \$100.

Martín concluye los \$100 fueron recaudados mediante la venta de 4 bonos de \$15 y 5 bonos de \$8.

Podemos plantear el problema de Martín mediante una igualdad de números enteros: si Martín vendió  $x$  bonos de \$15 e  $y$  bonos de \$8, entonces la cantidad de dinero que recaudó es:

$$15 \cdot x + 8 \cdot y = 100.$$

Las cantidades de bonos de cada tipo  $x, y$  que puede haber vendido Martín son las soluciones en los números enteros no negativos para esta ecuación. ¿Cómo encontrar las soluciones enteras de este tipo de ecuaciones?

### Encuentro sincrónico en donde introducimos la definición de ecuación diofántica

**TEOREMA 3.2.** Sean  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , con  $a$  y  $b$  no nulos. Si  $(a : b) \mid c$ , entonces las soluciones de la ecuación diofántica  $a \cdot x + b \cdot y = c$  son los pares  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  tales que

$$x = x_0 + k \cdot \frac{b}{(a : b)}, \quad y = y_0 - k \cdot \frac{a}{(a : b)}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

donde  $(x_0, y_0)$  es una solución particular de la ecuación.

**Encuentro sincrónico en donde se trabaja con el algoritmo para encontrar todas las soluciones de una ecuación diofántica.**

**LEMA 2.8.** *Un número natural  $n$  es compuesto si y sólo si existe un primo  $p$  que divide a  $n$  tal que  $1 < p \leq \sqrt{n}$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $n$  un número natural compuesto; dado que  $n$  no es primo, necesariamente admite algún divisor distinto de 1,  $-1$ ,  $n$  y  $-n$ , digamos  $d \in \mathbb{N}$ . En particular,  $1 < d < n$ . Es decir que existen  $d, q \in \mathbb{Z}$  que verifican:

$$n = d \cdot q \text{ y } 1 < d, q < n$$

En efecto, si  $q$  fuera mayor o igual que  $n$ , el producto  $d \cdot q$  sería mayor que  $n$ , porque  $d > 1$ ; y si fuera  $q = 1$ , debería ser  $d = n$ , contradiciendo la elección de  $d$ .

**Demostración matemática sobre números compuestos trabajada en un encuentro sincrónico**

**Teorema 4.6.5.** (Teorema fundamental de la aritmética.)

Sea  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0, \pm 1$ . Entonces  $a$  se escribe en forma única como producto de primos (positivos), (o se factoriza en forma única como producto de primos (positivos),) es decir:

- $\forall a \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0, \pm 1$ , existe  $r \in \mathbb{N}$  y existen primos positivos  $p_1, \dots, p_r$  distintos y  $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$  tales que

$$a = \pm p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}.$$

- Esta escritura es única salvo permutación de los primos.

**Encuentro sincrónico en donde trabajamos con el Teorema Fundamental de la Aritmética**

**Corolario 4.6.2.** (Cantidad de primos.)

*Existen infinitos primos (positivos) distintos.*

*Demostración.* Supongamos que no es así y que hay sólo un número finito  $N$  de primos positivos. O sea que el conjunto  $\mathcal{P}$  de primos positivos es  $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_N\}$ . Consideremos entonces el siguiente número natural  $M$ :

$$M := p_1 \cdot p_2 \cdots p_N + 1.$$

Dado que  $M \geq 2$  pues  $2 \in \mathcal{P}$ , existe por la proposición anterior un primo positivo  $p_i \in \mathcal{P}$  que divide a  $M$ . Pero

$$p_i \mid M \text{ y } p_i \mid p_1 \cdot p_2 \cdots p_N \implies p_i \mid 1,$$

contradicción que proviene de suponer que hay sólo finitos primos.  $\square$

## Demostración matemática sobre cantidad de primos trabajada en un encuentro sincrónico

<p><b>Definición</b> Sean <math>a, d \in \mathbb{Z}</math> con <math>d \neq 0</math>. Se dice que <math>d</math> <b>divide</b> a <math>a</math>, (ó que <math>a</math> es divisible por <math>d</math>, ó que <math>a</math> es múltiplo de <math>d</math> ó que <math>d</math> es divisor de <math>a</math>), si existe <math>k \in \mathbb{Z}</math> tal que <math>a = k \cdot d</math></p> <p><b>Notación:</b> <math>d \mid a</math>. Se lee "<math>d</math> divide a <math>a</math>". Si <math>d</math> no divide a <math>a</math> lo notaremos <math>d \nmid a</math></p>	<p><b>Propiedades de la divisibilidad</b></p> <p><b>Propiedad 1</b> Si <math>d \in \mathbb{Z} - \{0\}</math> entonces <math>d \mid 0</math>. Es decir, todo número entero distinto de 0 divide a 0.</p> <p><b>Demo:</b> <math>d \mid 0</math> si existe <math>k \in \mathbb{Z}</math> tal que <math>0 = k \cdot d</math>. Tomando <math>k = 0</math>, queda <math>0 = 0 \cdot d</math>.</p> <p><b>Propiedad 2</b> <math>d \mid a \Leftrightarrow -d \mid a</math>.</p> <p>En efecto, <math>d \mid a</math> si y solo si <math>a = k \cdot d</math>, con <math>k \in \mathbb{Z}</math>, si y solo si <math>a = (-k) \cdot (-d)</math> si y solo si <math>-d \mid a</math>.</p>
<p><b>Observación:</b> Si <math>d</math> divide a <math>a</math>, entonces <math>\frac{a}{d} \in \mathbb{Z}</math>.</p> <p><b>Ejemplos:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>2 \mid 6</math> pues <math>6 = 3 \cdot 2</math>.</li> <li>• <math>7 \mid 63</math> pues <math>63 = 9 \cdot 7</math>.</li> <li>• <math>7 \mid -63</math> pues <math>-63 = (-9) \cdot 7</math>.</li> <li>• <math>7 \nmid 62</math>.</li> <li>• <math>3 \mid 0</math> pues <math>0 = 0 \cdot 3</math>.</li> </ul>	

## Encuentro sincrónico donde trabajamos con la definición y propiedades de divisibilidad

**Proposición 4.5.12. (Propiedades esenciales de divisibilidad con coprimalidad.)**

Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  con  $c \neq 0$  y  $d \neq 0$ . Entonces

1.  $c \mid a, d \mid a$  y  $c \perp d \Rightarrow cd \mid a$ .
2.  $d \mid ab$  y  $d \perp a \Rightarrow d \mid b$ .

Observemos que estas afirmaciones no son ciertas si no se piden las propiedades de coprimalidad. Por ejemplo  $6 \mid 12$  y  $4 \mid 12$  pero  $24 \nmid 12$ , y  $6 \mid 2 \cdot 3 \Rightarrow 6 \mid 2$  o  $6 \mid 3$ . Por otro lado, las recíprocas siempre valen:  $cd \mid a \Rightarrow c \mid a$  y  $d \mid a$ , y  $d \mid b \Rightarrow d \mid ab$ . Luego podemos reformular la Proposición 4.5.12 de la manera siguiente:

1. Sea  $c \perp d$ . Entonces  $c \mid a, d \mid a \Leftrightarrow cd \mid a$ .
2. Sea  $d \perp a$ . Entonces  $d \mid ab \Leftrightarrow d \mid b$ .

**Demostración.** 1.  $c \perp d \Rightarrow 1 = sc + td \Rightarrow a = s(ca) + t(da)$ , pero  $d \mid a \Rightarrow cd \mid ca$  y  $c \mid a \Rightarrow cd \mid da$ , luego  $cd \mid s(ca) + t(da) = a$ .

2.  $d \perp a \Rightarrow 1 = sd + ta$ , luego  $b = (sb)d + t(ab)$ , pero  $d \mid ab$ , y  $d \mid d$ . Por lo tanto,  $d \mid (sb)d + t(ab) = b$ . □

## Propiedad sobre divisibilidad trabajada en un encuentro sincrónico

**Teorema 4.3.1. (Algoritmo de división.)**

Dados  $a, d \in \mathbb{Z}$  con  $d \neq 0$ , existen  $k, r \in \mathbb{Z}$  que satisfacen

$$a = k \cdot d + r \quad \text{con} \quad 0 \leq r < |d|.$$

Además,  $k$  y  $r$  son únicos en tales condiciones.

Este teorema fue trabajado en un encuentro sincrónico

- Actividades prácticas: guías y cuestionarios usando los recursos de Moodle de la Clase 3, 5 y 6 referidas a números enteros: divisibilidad, primos y compuestos y ecuaciones diofánticas.

**Actividad subida al aula virtual de tipo cuestionario de verdadero o falso:**

los invitamos a leer el apartado 4.2 del Capítulo 4 del libro *Algebra 1 de Teresa Krick*, donde se define divisibilidad (páginas 109 a 112). Leé y tomá nota de las definiciones que ahí se plantean y de las propiedades que aparecen. Luego, respondé el siguiente cuestionario de tipo Verdadero ó Falso. Podés indagar y explorar para decidir cuál es la respuesta correcta. En caso que consideres que sea verdadero, proponé algunos ejemplos. En caso de que sea falso recordá que podés demostrar la falsedad de una proposición exhibiendo un contraejemplo.

A partir de la lectura contestá las siguientes preguntas:

- ¿Qué condiciones tiene que cumplir un número entero  $d$  para que divida a otro número entero  $a$ ?
- ¿Qué ocurre si  $d$  es cero en la definición de divisibilidad?
- ¿Por qué esta definición no tiene sentido en los números reales o racionales?

Extraemos a modo de ejemplo una parte del texto y dos afirmaciones matemáticas del cuestionario de verdadero o falso

$d \mid a \wedge d \mid b \Rightarrow d \mid a + b$ , donde  $\wedge$  indica y

Seleccione una:

- Verdadero ✓  
 Falso

$d \mid a + b \Rightarrow d \mid a \wedge d \mid b$

Seleccione una:

- Verdadero  
 Falso ✓

Actividad donde se trabaja cuestiones sobre la divisibilidad: preguntas referidas a la definición y análisis del valor de verdad de proposiciones

**Pregunta 1**

Correcta

Puntúa 2,00 sobre 2,00

Editar pregunta

Todo número entero  $a$  distinto de cero tiene un divisor primo.

Seleccione una:

Verdadero

Falso ✓

Bien! ¿Se te ocurre un contraejemplo? Un posible contraejemplo es  $a = 1$ . No tiene un divisor primo, de hecho los únicos divisores son el 1 y  $-1$

Este enunciado de tipo verdadero o falso permite repasar propiedades de los números primos

La respuesta correcta es 'Falso'

### Actividad de un cuestionario en donde usan la definición de primos

**Problemas:**

Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  números enteros con  $c$  distinto de cero. Muestra que si  $a \mid c$  y  $b \mid c$  entonces  $a \mid b$ .

4. Si  $a \mid b$  y  $b \mid c$  entonces  $a \mid c$ .

En efecto, si  $a \mid b$  existe  $q \in \mathbb{Z}$  tal que  $b = q \cdot a$ . Si además  $b \mid c$ , existe  $q' \in \mathbb{Z}$  tal que  $c = q' \cdot b$ . Entonces  $c = q' \cdot (q \cdot a) = (q' \cdot q) \cdot a$ .

### Actividades en donde se tienen que demostrar una propiedad de divisibilidad

**Pregunta 1**

Finalizado

Puntúa 3,00 sobre 3,00

Editar pregunta

Las siguientes afirmaciones matemáticas se pueden demostrar por el Principio de Inducción. Elegí **solo una de ellas** y realiza una demostración usando este principio:

a)  $7^{2n} - 1$  es divisible por 48, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

b) La suma de primeros  $n$  números impares es  $n^2$ , es decir  $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Para ello indicar:

- Quién es la proposición  $p(n)$  que se quiere demostrar para cada  $n \in \mathbb{N}$ .
- Quién es el caso base y cómo se demuestra que es cierto.
- Cuál es la hipótesis inductiva y cómo se usa.

Adjuntar tu resolución, que sea lo más clara posible.

Pregunta 1 primera parte. Subiri.jpeg

Pregunta 1 segunda parte. Subiri.jpeg

### Actividad en donde los estudiantes tienen que hacer una demostración usando el Principio de inducción matemática

Pregunta 4

Correcta

Puntúa 2,00 sobre 2,00

Editar pregunta

Existen números primos  $p$  que tienen divisores positivos distintos de 1 y  $p$ .

Seleccione una:

Verdadero

Falso ✔

Bien, ya que los únicos divisores positivos de un número primo son el 1 y  $p$ .  
Permite repasar la definición de número primo.  
La respuesta correcta es 'Falso'

**Actividad donde tienen que argumentar la falsedad de una proposición matemática usando primos.**

*Primos y factorización*

24. (a) Probar que un número natural  $n$  es compuesto si y sólo si es divisible por algún primo positivo  $p \leq \sqrt{n}$ .

(b) Determinar cuáles de los siguientes enteros son primos: 91, 209, 307, 791, 1001, 3001.

(c) Hallar todos los primos menores o iguales que 100.

**Actividad en donde tienen que demostrar propiedades usando la noción de primos y compuestos**

- Elige un tema de alguna unidad temática: Por ejemplo, *las soluciones de una ecuación lineal pero con coeficientes en los enteros (ecuaciones diofánticas)*.
- Escriba claramente el tema elegido y a qué unidad corresponde.
- Explica dicho tema con lo visto en la materia. Realiza un escrito de una carilla. Puedes ampliar con los textos propuestos. Escribe la bibliografía usada.
- Ejemplifica el tema elegido enunciando un ejercicio que no hayamos realizado en clases ni en las entregas de las actividades obligatorias ni en los parciales. Resuélvelo.
- Arma una pregunta para realizar a tus futuros estudiantes que haga referencia al tema elegido. Contestá dicha pregunta. La usaremos el día del encuentro sincrónico.

**Actividad de la evaluación integradora donde los estudiantes sistematizan un tema a elección**

**Problemas:**

1) Sean  $p$  es primo y  $a$  es entero. Mostrá que la siguiente afirmación es verdadera: “Si  $p|a^3$  entonces  $p|a$ ”.

**2) Demostrá la siguiente afirmación: Si un primo  $p$  divide a un producto de dos números enteros entonces  $p$  divide a alguno de los factores.**

### Actividades de demostración matemática que involucra distintos métodos de demostración

Todo número entero  $a$  distinto de cero tiene un divisor primo.

Seleccione una:

Verdadero

Falso ✓

Bien! ¿Se te ocurre un contraejemplo? Un posible contraejemplo es  $a = 1$ . No tiene un divisor primo, de hecho los únicos divisores son el 1 y  $-1$

Este enunciado de tipo verdadero o falso permite repasar propiedades de los números primos

La respuesta correcta es 'Falso'

Pregunta 4  
Correcta  
Puntúa 2,00 sobre 2,00  
🔍  
⚙ Editar pregunta

Existen números primos  $p$  que tienen divisores positivos distintos de 1 y  $p$ .

Seleccione una:

Verdadero

Falso ✓

Bien, ya que los únicos divisores positivos de un número primo son el 1 y  $p$ .

Permite repasar la definición de número primo.

La respuesta correcta es 'Falso'

### Actividades de un cuestionario en donde se trabaja con la noción de demostración matemática

Para la propuesta de mejora seleccionamos el siguiente recorte de ejercicios prácticos porque son pertinentes para la construcción de la enseñanza de la demostración matemática. Previamente a esto, analizaremos estas actividades a la luz de las categorías propuestas. Este análisis se encuentra en el Capítulo 4 y su mejora en el Capítulo 5.

### Actividades elegidas en Introducción a la Matemática

**Actividad 1: Expresa en lenguaje coloquial y justifica cada paso:**

1. Si  $a \in \mathbb{Z} \wedge a=2n \rightarrow a^2 = (2n)^2$   
 $= 2(2n^2)$

---

2. Si  $a \in \mathbb{Z} \wedge a=2n+1 \rightarrow a^2 = (2n+1)^2$

$$= 4n^2 + 2n + 1$$

$$= 2(2n^2 + n) + 1$$


---

3. Si  $a \in \mathbb{Z} \wedge a = 10n \rightarrow a = 2(5n) \wedge a = 5(2n)$

---

4. Si  $a \in \mathbb{Z} \wedge a = 2n \rightarrow a^3 = (2n)^3$

$$= 8n^3$$

$$= 2(4n^3)$$


---

5. Si  $a \in \mathbb{Z} \wedge a = 2n + 1 \rightarrow a^3 = (2n + 1)^3$

$$= 8n^3 + 3 \cdot 4n^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2n \cdot 1^2 + 1^3$$

$$= 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1$$

$$= 2(4n^3 + 6n^2 + 3n) + 1$$

**Actividad 2: Demostrar los siguientes enunciados, en caso de ser verdaderos y si son falsos dar un contraejemplo. Justifica.**

1. La suma de un número entero y su anterior es un número impar.
2. La suma de un número entero y su siguiente es un número impar.
3. La suma de dos números pares es par.
4. Si  $a$  es un número entero e impar su cuadrado es impar.
5. Si  $a$  es múltiplo de 2 y de 3 entonces es múltiplo de 6. (Criterio de divisibilidad del número 6)
6. La suma de dos números pares es impar.
7. Si un entero es múltiplo de 3, también es múltiplo de 9.
8. La suma de dos números impares es par.

**Actividad 3 Teorema de Pitágoras: existen varias maneras de demostrar éste famoso teorema.**

**Se pide:**

**Demostrar el Teorema de Pitágoras utilizando geometría.**

**Explicar en lenguaje coloquial cada uno de los pasos desarrollados. Justifica.**

**Enunciar su recíproco.**

**Actividad 4: Discutir alrededor de las siguientes preguntas:**

- a) Si  $a$  y  $b$  son números enteros, ¿qué condiciones deberán cumplirse para poder afirmar que uno de ellos es múltiplo del otro? Incluir ejemplos.
- b) Si  $a$  y  $b$  son números enteros, ¿qué condiciones deberán cumplirse para poder afirmar que uno de ellos es divisor del otro? Incluir ejemplos.
- c) Si  $a$  es un número entero compuesto y  $b$  es un número entero primo, ¿cuáles son las condiciones que los diferencian? Incluye ejemplos.

### Actividades elegidas en Álgebra I

**Actividad 1: Decidí cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo  $a, b, c, d$  enteros y  $d$  distinto de cero. Si son falsas muestra un contraejemplo y si son verdaderas proponé algunos ejemplos.**

- a) Si  $d|a$  y  $d|b$  entonces  $d|a+b$
- b) Si  $d|a+b$  entonces  $d|a$  y  $d|b$
- c) Si  $d|a$  entonces  $d|a \cdot b$
- d) Si  $d|a \cdot b$  entonces  $d|a$
- e) Si  $d|a$  entonces  $d^3|a^3$
- f)  $6|a \cdot b$  entonces  $6|a$  o  $6|b$

**Elige una afirmación que consideraste verdadera y justifica el porqué de tu respuesta.**

**Actividad 2:**

- a) Sean  $a, b$  enteros. Se  $p$  primo tal que  $p$  divide a  $a^3 \cdot b^2$ . Mostrá que  $p$  divide a  $a$  o  $p$  divide a  $b$ .

- b) Sea  $a$  entero impar. Mostrá que el máximo común divisor entre  $a$  y  $a+2$  es 1, o sea  $(a:a+2)=1$
- c) Sean  $p$  es primo y  $a$  es entero. Mostrá que la siguiente afirmación es verdadera: “Si  $p|a^3$  entonces  $p|a$ ”.

**Actividad 3:**

- 1) Leé el Teorema Fundamental de la Aritmética que se encuentra en el libro de Teresa Krick *Álgebra I*, Capítulo 4, Teorema 4.6.5, páginas 150-151. Da ejemplos. Si un número es primo ¿Cómo se puede aplicar esta propiedad?
- 2) Si  $a$  y  $b$  son dos números enteros entonces  $a.b$  tiene exactamente los mismos primos que  $a$  y  $b$  en su factorización. ¿Qué puedes decir de esta afirmación? ¿Es verdadera? ¿Es falsa?
- 3) Sean  $p$  primo y  $a$  entero. Prueba que la siguiente afirmación es verdadera:  $p|a$  si y solo si  $p$  aparece en la factorización de  $a$ .
- 4) Decidí si existen enteros  $a$  y  $b$  no nulos que satisfagan que:  $a^2=8b^2$

**Actividad 4:** Sean  $a,b,c$  tres números enteros, con  $a$  y  $b$  no ceros y consideramos la ecuación lineal:

$$ax+by=c.$$


- 1) Explora con determinados valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  y determina si existen  $x$ ,  $y$  enteros tales que verifican la ecuación, es decir es solución de la ecuación.
- 2) A partir de los ejemplos, contesta la siguiente pregunta: ¿Cuándo este tipo de ecuaciones no tiene solución entera?
- 3) ¿Qué representa gráficamente las soluciones de dicha ecuación?
- 4) Leé la proposición 5.1.2 (Ecuación diofántica y máximo común divisor) del Libro *Algebra I de Teresa Krick*, página 172 y analiza si podemos contestar la pregunta del ítem 2). ¿Se puede aplicar esta propiedad si buscamos la solución real de dicha ecuación?

La presentación de las actividades de Introducción a la Matemática y Álgebra I señaladas arriba tiene por objeto poner de manifiesto la similitud en la presentación de los contenidos y en los modos de hacer, que nos permitirá analizar la articulación en relación al proceso de argumentación y validación.

II. Modos de trabajo en el aula. Para ello, seleccionamos videos grabados de las clases sincrónicas y foros de debate y consultas.

Contestar las siguientes preguntas en el foro de intercambios de la Clase 6

- ¿Cuándo una ecuación diofántica de la forma  $a \cdot X + b \cdot Y = c$  tiene al menos una solución entera?
- ¿Cómo se puede escribir la ecuación lineal de congruencia  $aX \equiv c \pmod{m}$  como una ecuación diofántica?
- La siguiente expresión vale para todo  $a, b \in \mathbb{Z}$ :  $a^b \equiv a \pmod{b}$

 **Foro de intercambios de la Clase 6**

Este espacio está pensando para trabajar con ciertas cuestiones que aparecen en la clase 6

**Pregunta de un foro de debate e intercambio correspondiente a la Clase 6: ecuaciones diofánticas**

**Si  $d$  divide a dos números  $a$  y  $b$ , entonces ¿qué ocurre entre  $d$  y una combinación de la forma  $s \cdot a + t \cdot b$ , para cualesquiera  $s$  y  $t$  enteros?**

**Pregunta propuesta en un encuentro sincrónico sobre propiedades de divisibilidad**

**Problema: Sean  $a, b$ , y  $c$  números enteros con  $c$  distinto de cero. Muestra que si  $a \cdot c \mid b \cdot c$  entonces  $a \mid b$**

**Problema trabajado en un foro de intercambio**

**Problema**

- Dividí 75 por 12 restando sucesivamente 12 de 75 e indicar el cociente y el resto de la misma. Muestra que como el resto tiene que ser menor que el divisor, esta condición conlleva la unicidad tanto del cociente como del resto.
- Calculá el resto y el cociente de la división de 76 por 57 y de 125 por 214.
- Calculá el resto y cociente de la división de  $a$  por  $b$  cuando  $b$  es mayor que  $a$ . Verificar que son únicos. ¿Cómo calcular el resto y cociente de la división de  $a$  por  $b$  cuando  $a$  es mayor que  $b$ ?
- ¿Qué ocurriría si no pudiéramos que el resto sea menor que el divisor?

### Preguntas sobre lo trabajado

Los invitamos a contestar en el foro de intercambios algunas de las siguientes cuestiones trabajadas:

1. ¿Por qué en el algoritmo de división en los enteros se pide que el resto  $r$  cumpla la condición de que  $0 \leq r < |d|$ ? ¿Qué ocurre si se elimina dicha condición?
2. Si queremos calcular el resto de dividir  $231^{2311}$  por 5, es necesario recurrir al algoritmo de división?
3. Si  $r_3(a) = 1$ , entonces ¿ $a \equiv 1 \pmod{3}$ ? ¿Vale la recíproca?

### Preguntas trabajadas en un encuentro sincrónico referidas al Algoritmo de división

#### 3.3 El porqué de este tema

El tema de la enseñanza de la demostración, desde la perspectiva de los fundamentos de los números enteros, en las primeras materias de un profesorado en Matemática es un área de vacancia. En la literatura consultada, observamos trabajos en Geometría (ver, por ejemplo, Balacheff, 2000), en Análisis Matemático (ver, Martínez Serra, Robledo, Vallina, 2017) y en torno a la demostración en Álgebra (ver, Fiallo, Camargo, Gutierrez, 2013). No encontramos trabajos en relación a su enseñanza en las primeras materias de un profesorado de Matemática en la universidad.

Por lo tanto, surge las siguientes necesidades:

- Explicitar los modos de trabajo con la demostración matemática como contenido a enseñar: la exploración, la conjetura, la argumentación, la validación, etc.
- La articulación de estos modos en los números enteros en Introducción a la Matemática y Álgebra I.
- Sistematizar los modos de enseñar la demostración matemática en números enteros articulados en Introducción a la Matemática y Álgebra I. Esto responde a la necesidad de, por un lado, generar una producción escrita para reutilizarla en otras cursadas con distintas modalidades (virtual, presencial, mixta), y por otro, mostrar a los estudiantes, futuros profesores de matemática, un modo de enseñar la demostración matemática.

## **Capítulo 4. La demostración matemática y su enseñanza en Álgebra I: su análisis**

Este capítulo consta de dos partes. En la primera parte, ofrecemos al lector un recorrido por el aula virtual indicando algunas actividades demostrativas e identificando en ellas las primeras tres categorías de análisis que se encuentran en el Capítulo 3. En la segunda parte, seleccionamos cuatro actividades demostrativas por considerarlas las más pertinentes ya que posibilitan la construcción de la enseñanza de la demostración matemática; y las analizamos a la luz de la totalidad de las categorías para la posterior propuesta de mejora. Elegimos del programa de la materia la unidad 2 correspondiente a Números Enteros y recortamos de la misma los siguientes temas: divisibilidad de los números enteros, números primos y compuestos, el Teorema Fundamental de la Aritmética y las ecuaciones diofánticas (ver Capítulo 2, sección 2.4) por ser contenidos compartidos a Introducción a la Matemática y Álgebra I.

Este capítulo está dividido en secciones, cada una de las cuales corresponden a una categoría de análisis que refieren a las dimensiones 1 y 2 descritas en el Capítulo 3. Estas son:

- **Categoría 1 (C1):** Tipos de actividad demostrativa propuestas previas a la demostración.
- **Categoría 2 (C2):** Estructura de las propiedades matemáticas y los tipos de demostraciones.
- **Categoría 3 (C3):** Las funciones de la demostración matemática y su enseñanza.
- **Categoría 4 (C4):** Discusión acerca de los modos de enseñar la demostración.

Realizamos un recorrido de la Clase 3, 5 y 6 del aula virtual sobre números enteros indicando algunas actividades demostrativas e identificando en ellas las categorías C1, C2 y C3, que se encuentran divididas en secciones.

A continuación, seleccionamos cuatro actividades demostrativas y las analizamos a la luz de la categoría C4, teniendo presente las categorías anteriores. Este análisis se cierra con una breve reflexión sobre la articulación de Introducción a la Matemática con Álgebra I.

Antes de comenzar este análisis hacemos una breve descripción del aula virtual preparada para la materia.

#### 4.1 Organización del aula virtual

El aula virtual de Álgebra I está organizada en 13 clases e incluye también una solapa de cuestiones generales y cuatro solapas de evaluaciones (evaluaciones parciales, evaluación integradora y final). A continuación, se observa una captura de pantalla:

Generales	Clase 1: preliminares	Clase 2: Naturales	Clase 3: Enteros	Clase 4 Enteros	Clase 5 Enteros	Clase 6 Enteros	Clase 7 Sistemas
Clase 8 Sistemas-Repaso-Primer parcial	Clase 9 Complejos	Clase 10 Complejos	Clase 11 Polinomios	Clase 12 Polinomios			
Clase 13 Polinomios	Evaluaciones de la materia	Consultas para el Segundo Parcial y recuperatorios		Evaluación Integradora			
Tutoría para examen final /Examen Final							

Cada clase tiene una duración de una semana y en la misma se refieren al desarrollo de las unidades didácticas: números naturales (dos clases), números enteros (4 clases),

sistemas de ecuaciones lineales (2 clases), números complejos (2 clases) y polinomios (3 clases). En cada clase se puede encontrar una hoja de ruta que organiza la clase, un foro de consultas e intercambio, los materiales didácticos, las guías prácticas, los cuestionarios de verdadero o falso y de desarrollo, videos explicativos y el cronograma de los encuentros sincrónicos.

Destacamos un recorte de las Clases 3, 5 y 6 de números enteros en donde se encuentran los temas que son objeto de análisis del presente TFE. En la Clase 3 se puede encontrar el tema de divisibilidad, en la Clase 5 se trabaja con números primos y compuestos y la factorización de los números enteros y en la Clase 6 se trabaja con las ecuaciones diofánticas.

#### 4.2 C1: Tipos de actividad demostrativa propuestas previas a la demostración.

Definimos la *actividad demostrativa* como el conjunto de actividades que apoyan e impulsan la producción de una demostración matemática (Camargo, 2010). Estas actividades son explorar, conjeturar, definir, argumentar, demostrar y sistematizar<sup>18</sup>.

En el siguiente cuadro indicamos los **tipos de actividades demostrativas** usadas en Álgebra I.

Explorar	Uso menos frecuente
Conjeturar	Uso menos frecuente
Definir	Uso permanente
Argumentar	Uso permanente
Demostrar	Uso permanente
Sistematizar	Uso menos frecuente

<sup>18</sup> Capítulo 1, sección 1.5

A continuación, desarrollamos el cuadro mostrando cómo se trabaja estas actividades demostrativas en Álgebra I.

Revisitando el aula virtual de Álgebra I del segundo cuatrimestre 2020, observamos que la *actividad de exploración* es introductoria a un contenido matemático a enseñar y está relacionada con otro tipo de actividades como conjeturar o argumentar. Se observan pocas actividades relacionadas con la actividad de explorar para el armado de conjeturas. A continuación, daremos algunos ejemplos.

En una primera actividad de números enteros, al introducir el concepto de divisibilidad y sus propiedades, se les propone a los estudiantes la siguiente lectura a partir de la cual responden una serie de preguntas que permiten la exploración de la definición de divisibilidad y de algunas de sus propiedades.

**Actividad subida al aula virtual de tipo cuestionario de verdadero o falso:**

... los invitamos a leer el apartado 4.2 del Capítulo 4 del libro *Algebra 1 de Teresa Krick*, donde se define divisibilidad (páginas 109 a 112). Leé y tomá nota de las definiciones que ahí se plantean y de las propiedades que aparecen. Luego, respondé el siguiente cuestionario de tipo Verdadero ó Falso. Podés indagar y explorar para decidir cuál es la respuesta correcta. En caso que consideres que sea verdadero, proponé algunos ejemplos. En caso de que sea falso recordá que podés demostrar la falsedad de una proposición exhibiendo un contraejemplo.

**A partir de la lectura contestá las siguientes preguntas:**

**¿Qué condiciones tiene que cumplir un número entero  $d$  para que divida a otro número entero  $a$ ?**

**¿Qué ocurre si  $d$  es cero en la definición de divisibilidad?**

**¿Por qué esta definición no tiene sentido en los números reales o racionales?**

**Extraemos a modo de ejemplo una parte del texto y dos afirmaciones matemáticas del cuestionario de verdadero o falso.**

El hecho que los números enteros no son divisibles (con cociente entero) por cualquier otro número entero hace interesante estudiar la noción y consecuencias de la *divisibilidad*. Este estudio no se justifica por ejemplo de la misma manera en  $\mathbb{Q}$  o  $\mathbb{R}$  donde todo número racional o real es divisible (con cociente racional o real) por cualquier otro número racional o real no nulo.

**Definición 4.2.1. (Divisibilidad.)**

Sean  $a, d \in \mathbb{Z}$  con  $d \neq 0$ . Se dice que  $d$  divide a  $a$ , y se nota  $d \mid a$ , si existe un elemento  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $a = k \cdot d$  (o sea si el cociente  $\frac{a}{d}$  es un número entero). También se dice en ese caso que  $a$  es divisible por  $d$ , o que  $a$  es múltiplo de  $d$ . O sea:

$$d \mid a \iff \exists k \in \mathbb{Z} : a = k \cdot d.$$

En caso contrario, se dice que  $d$  no divide a  $a$ , y se nota  $d \nmid a$ . Eso es cuando el cociente  $\frac{a}{d} \notin \mathbb{Z}$ , o sea no existe ningún entero  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $a = k \cdot d$ .

$$d \mid a \wedge d \mid b \Rightarrow d \mid a + b, \text{ donde } \wedge \text{ indica y}$$

Seleccione una:

- Verdadero ✓
- Falso

$$d \mid a + b \Rightarrow d \mid a \wedge d \mid b$$

Seleccione una:

- Verdadero
- Falso ✓

Esta actividad permite que los estudiantes exploren a través de ejemplos numéricos el sentido de la definición de divisibilidad, de sus límites y alcances; y que trabajen con la exploración numérica para decidir si determinada afirmación matemática es verdadera o falsa. Este tipo de actividades se comenzaron a trabajar en Introducción a la Matemática. A esta actividad se le puede agregar preguntas o ejercicios que inviten a los estudiantes a dar argumentos y ejemplos de cuándo un número entero  $d$  es divisor de  $a$  y cuándo no lo es.

La siguiente actividad forma parte de un foro de intercambio en relación al concepto de ecuación diofántica (ecuación lineal con dos incógnitas, pero cuyas soluciones son enteras).

Contestar las siguientes preguntas en el foro de intercambios de la Clase 6

- ¿Cuándo una ecuación diofántica de la forma  $a \cdot X + b \cdot Y = c$  tiene al menos una solución entera?
- ¿Cómo se puede escribir la ecuación lineal de congruencia  $aX \equiv c \pmod{m}$  como una ecuación diofántica?
- La siguiente expresión vale para todo  $a, b \in \mathbb{Z}$ :  $a^b \equiv a \pmod{b}$

 Foro de intercambios de la Clase 6

Este espacio está pensando para trabajar con ciertas cuestiones que aparecen en la clase 6

En este caso, los estudiantes pueden contestar las preguntas apelando a la exploración numérica o a argumentaciones matemáticas basadas en propiedades.

En cuanto a la *actividad de conjeturar* en matemática hacemos referencia como ya discutimos en la sección 1.5 del Capítulo 1, a formular una suposición verbal, simbólica o gráfica, llamada conjetura, basada en evidencias empíricas. Como es producto de la exploración, se tiene un alto grado de certeza en la afirmación que se hace, pero su validez puede asegurarse cuando se justifique mediante una demostración matemática, ya que en principio las conjeturas pueden ser verdaderas o falsas.

Revisitando el aula virtual de Álgebra I observamos que existen pocas actividades referidas a la conjetura en matemática. La mayoría de las actividades propuestas son de argumentación de una afirmación matemática, de la aplicación de una propiedad a un problema o de mostrar si determinada propiedad es verdadera o falsa dando argumentos para tal decisión.

La siguiente pregunta corresponde a un encuentro sincrónico en donde se trabaja con la conjetura matemática a partir de propiedades relacionadas con la noción de divisibilidad:

**Si  $d$  divide a dos números  $a$  y  $b$ , entonces ¿qué ocurre entre  $d$  y una combinación de la forma  $s \cdot a + t \cdot b$ , para cualesquiera  $s$  y  $t$  enteros?**

Para responder la pregunta los estudiantes usan propiedades de la divisibilidad. A partir de las respuestas se construye, en un encuentro sincrónico, la siguiente propiedad matemática: *Si  $d$  es divisor de  $a$  y  $b$  entonces  $d$  es divisor de cualquier combinación lineal entre  $a$  y  $b$ , es decir,  $d$  es divisor de  $s \cdot a + t \cdot b$  con  $s$  y  $t$  enteros.*

Otro ejemplo de conjetura matemática, pero en este caso para determinar cuándo una ecuación diofántica tiene solución y si la tiene cuántas, son las siguientes preguntas que se encuentran planteadas en un archivo preparado para un encuentro sincrónico.

En las clases anteriores estuvimos trabajando con el Teorema de Bézout, el cuál nos dice que dados  $a, b \in \mathbb{Z}$  no nulos, existen  $x, y \in \mathbb{Z}$  tales que

$$a \cdot x + b \cdot y = (a : b)$$

Por ejemplo, como  $(20 : 16) = 4$  tenemos que:

$$4 = 20 \cdot 1 + 16 \cdot (-1)$$

Tambien

$$4 = 20 \cdot 5 + 16 \cdot (-6)$$

y tambien

$$4 = 20 \cdot (-3) + 16 \cdot (4)$$

Podemos intuir que existen infinitos enteros  $x$  e  $y$  que satisfacen la ecuación  $4 = 20 \cdot x + 16 \cdot y$ .

Nos interesa determinar:

- ¿Cuándo este tipo de ecuaciones no tiene soluciones enteras?
- Si este tipo de ecuaciones tiene solución, ¿Cómo determinar todas sus soluciones?

Para dar algunas respuestas a estas preguntas los estudiantes trabajan de manera gráfica, o con ejemplos, usando GeoGebra. Las respuestas definitivas a estas preguntas fueron trabajadas a lo largo de la clase sincrónica.

La *actividad de definir*, como lo hemos planteado en el Capítulo 1 sección 1.5, engloba dos actividades en la enseñanza experimental: formular definiciones organizando un subconjunto arbitrario de propiedades necesarias y suficientes de un concepto del cual otras propiedades de éste pueden ser deducidas, y usar definiciones en la producción de actividades deductivas.

Revisando el aula virtual de Álgebra I, observamos que, en la mayoría de las actividades propuestas, se usa una definición matemática para la resolución de un ejercicio, para dar argumentos de una afirmación o para el análisis de la validez de una proposición matemática. Solo encontramos la siguiente actividad en la cual se construye; en este caso la definición de la ecuación diofántica, a partir de un problema en contexto.

## Ecuaciones diofánticas

### Problema

Los alumnos de la Escuela 314 hacen una colecta para reunir fondos para ayudar a una escuela de frontera. Para esto, ofrecen bonos contribución de dos tipos: bonos de \$15 y bonos de \$8. Martín se lleva un piloncito de bonos de \$15 y otro de bonos de \$8. Después de vender varios bonos recaudó \$100, pero no recuerda cuántos bonos vendió de cada clase (ni sabe cuántos bonos tenía cada uno de sus piloncitos al comienzo).  
¿Puede Martín determinar cuántos bonos vendió de cada tipo?

Esta actividad permite introducir la definición de ecuación diofántica, como se observa a continuación:

Para tratar de determinar estas cantidades, Martín observa que:

- si no hubiera vendido ningún bono de \$15, los \$100 provendrían de vender bonos de \$8: si vendió una cantidad  $y$  de bonos de \$8 sería  $\$100 = \$8 \cdot y$ , (no puede ser porque 100 no es múltiplo de 8).
- Si hubiera vendido un solo bono de \$15, entonces los  $\$100 - \$15 = \$85$  restantes provendrían de vender bonos de \$8, pero 85 no es múltiplo de 8;
- si hubiera vendido 2 bonos de \$15 pesos, los  $\$100 - 2 \cdot \$15 = \$70$  restantes provendrían de vender bonos de \$8. pero 70 no es múltiplo de 8;
  - no puede ser que haya vendido 3 bonos de \$15, porque  $\$100 - 3 \cdot \$15 = \$55$  y 55 tampoco es múltiplo de 8;
  - es posible que haya vendido 4 bonos de \$15, ya que  $\$100 - 4 \cdot \$15 = \$40 = 5 \cdot \$8$ . Esto significa que además habría vendido 5 bonos de 8;
  - razonando de la misma manera deduce que no puede ser que haya vendido ni 5 ni 6 bonos de \$15. Además, seguro que no vendió más de 7 de estos bonos, pues  $7 \cdot \$15 = \$105$  y sólo recaudó \$100.

Martín concluye los \$100 fueron recaudados mediante la venta de 4 bonos de \$15 y 5 bonos de \$8.

Podemos plantear el problema de Martín mediante una igualdad de números enteros: si Martín vendió  $x$  bonos de \$15 e  $y$  bonos de \$8, entonces la cantidad de dinero que recaudó es:

$$15 \cdot x + 8 \cdot y = 100.$$

Las cantidades de bonos de cada tipo  $x, y$  que puede haber vendido Martín son las soluciones en los números enteros no negativos para esta ecuación. ¿Cómo encontrar las soluciones enteras de este tipo de ecuaciones?

La siguiente afirmación matemática corresponde a un cuestionario de números primos

### Pregunta 1

Correcta

Puntúa 2,00 sobre 2,00



Editar pregunta

Todo número entero  $a$  distinto de cero tiene un divisor primo.

Seleccione una:

Verdadero

Falso

Bien! ¿Se te ocurre un contraejemplo? Un posible contraejemplo es  $a = 1$ . No tiene un divisor primo, de hecho los únicos divisores son el 1 y  $-1$

Este enunciado de tipo verdadero o falso permite repasar propiedades de los números primos

La respuesta correcta es 'Falso'

Para poder decidir si es verdadero o falso el estudiante tiene que comprender y usar la definición de número primo y de divisibilidad.

Para demostrar la siguiente propiedad es necesario utilizar la definición de número primo y de divisor.

**LEMA 2.8.** *Un número natural  $n$  es compuesto si y sólo si existe un primo  $p$  que divide a  $n$  tal que  $1 < p \leq \sqrt{n}$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $n$  un número natural compuesto; dado que  $n$  no es primo, necesariamente admite algún divisor distinto de 1,  $-1$ ,  $n$  y  $-n$ , digamos  $d \in \mathbb{N}$ . En particular,  $1 < d < n$ . Es decir que existen  $d, q \in \mathbb{Z}$  que verifican:

$$n = d \cdot q \text{ y } 1 < d, q < n$$

En efecto, si  $q$  fuera mayor o igual que  $n$ , el producto  $d \cdot q$  sería mayor que  $n$ , porque  $d > 1$ ; y si fuera  $q = 1$ , debería ser  $d = n$ , contradiciendo la elección de  $d$ .

En dicha actividad se les pide a los estudiantes que justifiquen cada uno de los pasos de la demostración matemática indicando cuándo se usa una definición y cuándo se usa una propiedad matemática.

La *actividad de argumentar*, como ya lo planteamos en la sección 1.5 del Capítulo 1, se puede usar en dos sentidos:

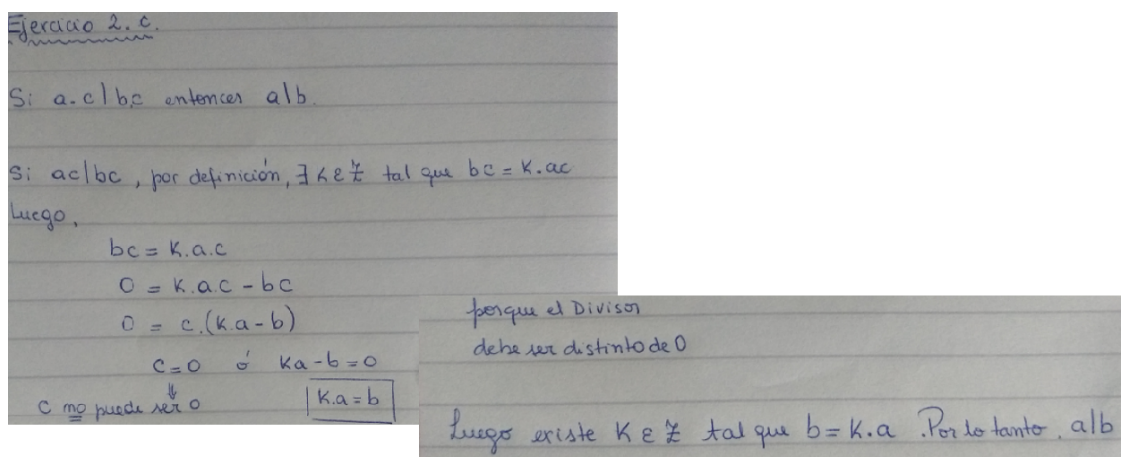
1. En el proceso de exploración, formulación y sociabilización de una conjetura argumentar hace referencia a dar las razones en pro o en contra de una afirmación con el objetivo de establecer un cierto grado de certeza del mismo y postularse como candidato a ser demostrado.
2. En el proceso de demostración de una conjetura argumentar hace referencia a dar las razones o puntos de vista, identificar los enunciados o referentes teóricos, en pro de una afirmación, con el objetivo de buscar ideas que conforman la demostración matemática del enunciado.

Revisitando el aula virtual de Álgebra I observamos que las actividades argumentativas más usadas son aquellas que permiten dar las razones para afirmar que una proposición es verdadera o falsa o para dar las respuestas a determinado problema matemático. No

tenemos registro de la argumentación en el proceso de exploración, formulación y sociabilización de una conjetura.

En la siguiente actividad el estudiante tiene que realizar argumentaciones matemáticas para poder demostrar la propiedad usada.

**Problema: Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  números enteros con  $c$  distinto de cero. Muestra que si  $a \mid bc$  entonces  $a \mid b$ .**



En las argumentaciones presentadas el estudiante utiliza la definición de divisibilidad, el concepto de dominio íntegro y las razones de por qué en la expresión  $c.(k.a-b)$  se tiene que  $c$  no es cero, y si  $c.(k.a-b)=0$  entonces  $k.a-b=0$ . A partir de allí deduce mediante argumentos que  $a$  divide a  $b$ .

En el siguiente problema de tipo verdadero o falso los estudiantes tienen que dar argumentos de por qué la proposición matemática enunciada es falsa.

Pregunta 4  
Correcta  
Puntúa 2.00 sobre 2.00  
F  
Editar pregunta

Existen números primos  $p$  que tienen divisores positivos distintos de 1 y  $p$ .

Seleccione una:

Verdadero

Falso ✓

Bien, ya que los únicos divisores positivos de un número primo son el 1 y  $p$ .  
Permite repasar la definición de número primo.  
La respuesta correcta es 'Falso'

La actividad de *demostrar* hace referencia al aspecto producto de la demostración. Es la actividad que consiste en organizar enunciados matemáticos conocidos y que se asumen como válidos, en una cadena deductiva que lleva a su validación.

Tanto la actividad de argumentar como demostrar se encuentran presentes en las propuestas de problemas y de lectura del material bibliográfico a lo largo de toda la materia de Álgebra I. La mayoría de los problemas tienen la estructura de “Mostrá que...”, “ Demostrá que..”. En la mayoría de las propuestas no encontramos de manera explícita preguntas que orienten la construcción de la demostración o que permitan reflexionar sobre las definiciones o propiedades necesarias para realizar la demostración. Este tipo de trabajo se realizaba en los encuentros sincrónicos. A continuación, extraemos un ejemplo en el que los estudiantes tienen que usar la definición de primo y compuesto.

Primos y factorización

24. (a) Probar que un número natural  $n$  es compuesto si y sólo si es divisible por algún primo positivo  $p \leq \sqrt{n}$ .
- (b) Determinar cuáles de los siguientes enteros son primos: 91, 209, 307, 791, 1001, 3001.
- (c) Hallar todos los primos menores o iguales que 100.

Al finalizar cada unidad de la materia, se les pide a los estudiantes que resuman en un archivo todas las definiciones matemáticas y propiedades usadas en esa teoría. Esta tarea propuesta se puede enmarcar en la *actividad demostrativa de sistematizar*, es decir, organizar enunciados dados como ciertos o que se han demostrado, de acuerdo a un conjunto de axiomas, definiciones y teoremas con el objeto de construir una teoría (ver Capítulo 1, sección 1.5). Por otra parte, en la evaluación integradora final de la materia se les propuso a los estudiantes la siguiente actividad de sistematización referida a un tema matemático a elección.

- Elige un tema de alguna unidad temática: Por ejemplo, *las soluciones de una ecuación lineal pero con coeficientes en los enteros (ecuaciones diofánticas)*.
- Escriba claramente el tema elegido y a qué unidad corresponde.
- Explica dicho tema con lo visto en la materia. Realiza un escrito de una carilla. Puedes ampliar con los textos propuestos. Escribe la bibliografía usada.
- Ejemplifica el tema elegido enunciando un ejercicio que no hayamos realizado en clases ni en las entregas de las actividades obligatorias ni en los parciales. Resuélvelo.
- Arma una pregunta para realizar a tus futuros estudiantes que haga referencia al tema elegido. Contestá dicha pregunta. La usaremos el día del encuentro sincrónico.

Analizando las actividades demostrativas propuestas en Álgebra I se observan que la mayoría constituyen actividades de argumentar y demostrar que una afirmación es verdadera o falsa o dar los argumentos de por qué la proposición matemática es válida, bajo las hipótesis presentadas. Encontramos pocas actividades de explorar y conjeturar. Si bien es cierto que se recupera lo trabajado en Introducción a la Matemática, a partir de este análisis, vemos que es necesario profundizar en las actividades de exploración y conjetura guiadas con preguntas. Éstas permiten la búsqueda de regularidades para enunciar una propiedad matemática y/o la construcción de una prueba reflexionando sobre qué definiciones o propiedades se usan. Otro tipo de actividad que sería importante incorporar es el trabajo con la propiedad recíproca de una proposición matemática. También dentro de las proposiciones falsas, analizar las restricciones necesarias para la validez de dicha proposición que permita ser utilizable en otros problemas.

### **4.3. C2: Estructura de las propiedades matemáticas y los tipos de demostraciones.**

Ibañes y Ortega (1997) proponen una clasificación de las proposiciones matemáticas que se quieren demostrar y de las técnicas de demostración desde la perspectiva de la propia matemática. Éstas se clasifican según su estructura lógica (tipos), según los procedimientos lógicos (métodos), según los procedimientos matemáticos (estilos) y según el procedimiento de exposición (modos)<sup>19</sup>. En este apartado explicitaremos los

---

<sup>19</sup> Capítulo 1, sección 1.4

enunciados y las actividades propuestas en el aula virtual de Álgebra I de acuerdo a esta clasificación. Pensamos que las formas de enunciar las actividades condicionan el tipo de pruebas realizadas por los estudiantes. Además, variar en la lectura y reflexión de distintos modos de demostrar permite el aprendizaje de distintas habilidades argumentativas y deductivas.

En el siguiente cuadro indicamos **la estructura de las proposiciones matemáticas y los tipos de demostraciones** trabajadas en Álgebra I.

Estructura lógica del enunciado	Tipos	Implicación	Uso frecuente
		Cuantificadores	Uso poco frecuente
Procesos lógicos	Métodos	Método de Silogismo	Uso frecuente
		Demostración por casos	Uso poco frecuente
		Demostración por reducción al absurdo	Uso poco frecuente
		Demostración por inducción completa	Uso frecuente
		Método Constructivo	Uso poco frecuente
Procedimientos matemáticos	Estilos	Algebraico-aritmético	Uso permanente
Procesos de exposición	Modos	Sintético (directo)	Uso frecuente
		Analítico (indirecto)	Uso frecuente

A continuación, desarrollamos el cuadro, a partir de un recorrido por el aula virtual.

### **Estructura lógica: tipos**

Revisitando el aula virtual de Álgebra I nos encontramos que tanto en las actividades prácticas de demostrar una determinada afirmación matemática o en la lectura de proposiciones matemáticas, la mayoría están enunciadas en el formato: “Si... entonces...”, “...si y solo si...” Solo en algunos casos los enunciados son de la forma: “Existe un número...” o “Para todo número...”. Esto también lo observamos en las

actividades en la que los estudiantes tienen que determinar si la afirmación matemática enunciada es verdadera o falsa. Las actividades que no responden al formato: “Si... entonces...” tienen la dificultad de que los estudiantes deban reconocer en el enunciado cuál es la hipótesis y cuál es la tesis. Además, algunas proposiciones matemáticas tienen otra dificultad, que es reconocer las hipótesis implícitas que pueden ser usadas para justificar la validez de la tesis.

A continuación, damos algunos ejemplos de ellos:

**Actividad 1<sup>20</sup>: Decidí cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo  $a, b, c, d$  enteros y  $d$  distinto de cero. Si son falsas muestra un contraejemplo y si son verdaderas proponé algunos ejemplos.**

a) Si  $d|a$  y  $d|b$  entonces  $d|a+b$

b) Si  $d|a+b$  entonces  $d|a$  y  $d|b$

**Elige una afirmación que consideraste verdadera y justifica el porqué de tu respuesta**

Observamos que los enunciados de estas proposiciones matemáticas son todas del estilo: “Si A entonces B”. La primera resulta verdadera y la segunda falsa. La justificación de que la segunda es falsa es:  $2|3+5$  pero 2 no divide ni a 3 ni a 5.

**Actividad 2<sup>21</sup>: b) Sea  $a$  entero impar. Mostrá que el máximo común divisor entre  $a$  y  $a+2$  es 1, o sea  $(a:a+2)=1$**

En este enunciado a pesar de que no está escrito en formato “si... entonces...” se puede reescribir de esa forma. Más precisamente, un enunciado equivalente es: **si  $a$  es un entero impar, entonces  $(a:a+2)=1$** . Los estudiantes tienen que reconocer cuál es la hipótesis y cuál es la tesis, y qué argumentos pueden dar.

**Actividad 3<sup>22</sup>: Sean  $p$  primo y  $a$  entero. Prueba que la siguiente afirmación es verdadera:  $p|a$  si y solo si  $p$  aparece en la factorización de  $a$ .**

<sup>20</sup> Corresponde a parte de una actividad en clase y que se encuentra enunciada en el Capítulo 3, sección 3.2

<sup>21</sup> Corresponde a una actividad en clase y que se encuentra enunciada en el Capítulo 3, sección 3.2

<sup>22</sup> Actividad dada en clase y que se encuentra en el Capítulo 3, sección 3.2

La proposición matemática a demostrar está enunciada de la forma; “si y solo si”. En este problema los estudiantes tienen que reconocer qué partes hay que demostrar y en cada parte, cuál es la hipótesis y cuál es la tesis.

El siguiente enunciado está escrito usando el cuantificador universal  $\forall$  (para todo).

Todo número entero  $a$  distinto de cero tiene un divisor primo.

Seleccione una:

Verdadero

Falso ✓

---

Bien! ¿Se te ocurre un contraejemplo? Un posible contraejemplo es  $a = 1$ . No tiene un divisor primo, de hecho los únicos divisores son el 1 y  $-1$

Este enunciado de tipo verdadero o falso permite repasar propiedades de los números primos

La respuesta correcta es 'Falso'

Para determinar que esta proposición matemática es falsa los estudiantes tienen que poder encontrar un número entero que no tenga divisor primo. Algunas preguntas que se podrían hacer son: ¿qué condiciones tiene que cumplir el entero  $a$  para que verifique la proposición? ¿es posible encontrar un entero  $a$  en esas condiciones? ¿Por qué? ¿Qué condiciones tiene que cumplir el entero  $a$  para que no verifique la proposición? ¿Qué ocurre si encontramos un entero  $a$  que no cumple la proposición?

En la propuesta de enseñanza de Álgebra I también encontramos enunciados usando el cuantificador existencial ( $\exists$ ). A continuación, damos un ejemplo.

Pregunta 4

Correcta

Puntúa 2.00 sobre 2.00

🔧 Editar pregunta

Existen números primos  $p$  que tienen divisores positivos distintos de 1 y  $p$ .

Seleccione una:

Verdadero

Falso ✓

---

Bien, ya que los únicos divisores positivos de un número primo son el 1 y  $p$ .

Permite repasar la definición de número primo.

La respuesta correcta es 'Falso'

En este problema se pueden hacer las siguientes preguntas: ¿Qué tiene que cumplir el primo  $p$  para que verifique la proposición matemática? ¿Qué tiene que cumplir el primo  $p$

para que no verifique dicha proposición? ¿Qué ocurre si no encontramos un primo  $p$  en esas condiciones? Y si no lo encontramos, ¿por qué sucede?

Un teorema utilizado en clase y que es muy importante en la teoría de enteros es el Teorema Fundamental de la Aritmética, el mismo está enunciado en formato de “Si... entonces...”. La tesis además tiene una condición de existencia y unicidad.

**Teorema 4.6.5.** (Teorema fundamental de la aritmética.)

*Sea  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0, \pm 1$ . Entonces  $a$  se escribe en forma única como producto de primos (positivos), (o se factoriza en forma única como producto de primos (positivos),) es decir:*

- $\forall a \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0, \pm 1$ , existe  $r \in \mathbb{N}$  y existen primos positivos  $p_1, \dots, p_r$  distintos y  $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$  tales que

$$a = \pm p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}.$$

- *Esta escritura es única salvo permutación de los primos.*

A continuación, se encuentra una actividad relacionada con este teorema:

### Actividad 3<sup>23</sup>:

**1) Si  $a$  y  $b$  son dos números enteros entonces  $a \cdot b$  tiene exactamente los mismos primos que  $a$  y  $b$  en su factorización. ¿Qué puedes decir de esta afirmación? ¿Es verdadera? ¿Es falsa?**

**2) Decidí si existen enteros  $a$  y  $b$  no nulos que satisfagan que:  $a^2 = 8b^2$**

Esta actividad permite aplicar el teorema para la resolución de otros problemas. Las resoluciones de estos problemas tienen como objetivo que el estudiante comprenda la importancia de conocer la factorización de un número compuesto en producto de primos.

### Procedimientos lógicos: métodos

En cuanto a los métodos utilizados para las demostraciones matemáticas en Álgebra I podemos observar que en la mayoría de las propuestas de actividades de las guías prácticas se encuentran el método directo, el método por inducción completa y la

<sup>23</sup> Parte de una actividad correspondiente a una clase, esta actividad se encuentra en el Capítulo, sección 3.2

reducción por el absurdo<sup>24</sup>. Por otro lado, se observa también que se propone en la materia la lectura de teoremas en donde su demostración utiliza el método constructivo y la demostración por casos.<sup>25</sup>


A continuación, damos ejemplos de cada uno de estos casos:

**Ejercicio:** Sean  $p$  es primo y  $a$  es entero. Muestra que la siguiente afirmación es verdadera: “Si  $p|a^3$  entonces  $p|a$ ”.

Para demostrar esta propiedad matemática los estudiantes tienen que utilizar el método directo, es decir, partiendo de la hipótesis de que  $p$  es primo y que  $p|a^3$ , tienen que demostrar que  $p|a$ . Para ello, necesitan utilizar una hipótesis implícita (propiedad matemática ya demostrada) que dice que si  $p$  es un primo que divide a un producto de números enteros  $a \cdot b$  entonces  $p$  divide a  $a$  o  $p$  divide a  $b$ . El método directo es la estrategia básica de demostración, que parte de la hipótesis y mediante la manipulación conveniente de ésta y / o de propiedades ya demostradas (hipótesis implícitas) se llega a la tesis.

Otro ejemplo de un problema que se utiliza un método de demostración es el siguiente:

Pregunta 1  
Finalizado  
Puntúa 3,00  
sobre 3,00

 Editar pregunta

Las siguientes afirmaciones matemáticas se pueden demostrar por el Principio de Inducción. Elegí **solo una de ellas** y realiza una demostración usando este principio:


a)  $7^{2n} - 1$  es divisible por 48, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .


b) La suma de primeros  $n$  números impares es  $n^2$ , es decir  $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Para ello indicar:

- Quién es la proposición  $p(n)$  que se quiere demostrar para cada  $n \in \mathbb{N}$ .
- Quién es el caso base y cómo se demuestra que es cierto.
- Cuál es la hipótesis inductiva y cómo se usa.

Adjuntar tu resolución, que sea lo más clara posible.

 Pregunta 1 primera parte. Subiri.jpeg

 Pregunta 1 segunda parte. Subiri.jpeg

Este problema corresponde a una actividad de clase en donde los estudiantes para demostrar que 48 divide a  $7^{2n}-1$  para todo  $n$  natural tienen que utilizar el Principio de

<sup>24</sup> El Método directo, por Inducción completa y la reducción por el absurdo se encuentra en el Capítulo 1, sección 1.4.

<sup>25</sup> El Método constructivo y la demostración por casos se encuentra en el Capítulo 1, sección 1.4

Inducción Completa. Este método dice que si queremos demostrar  $P(n)$ : 48 divide a  $7^{2n}-1$  para todo  $n$  natural, tenemos que probar que:

- $P(1)$  es verdadera.
- Si aceptamos que  $P(k)$  es verdadera para algún  $k$  natural, tenemos que mostrar que  $P(k+1)$  es verdadera.

En el siguiente problema los estudiantes utilizan la reducción por el absurdo. Este problema además tiene la dificultad adicional que la tesis está escrita como una disyunción lógica.

**Problema: Demostrá la siguiente afirmación: Si un primo  $p$  divide a un producto de dos números enteros entonces  $p$  divide a alguno de los factores.**

Para realizar la demostración los estudiantes usan una variante de la reducción por el absurdo que es el método del contrarrecíproco. Si queremos demostrar  $H \rightarrow T$ , partimos de que  $\neg T$  es verdadero y mediante deducciones lógicas demostramos que  $\neg H$  es verdadero, que corresponde a una contradicción ya que  $H$  es verdadero. En este problema, suponemos que  $p$  divide a  $m \cdot n$ . Si  $p$  divide a  $m$ , entonces la tesis es verdadera. Si en cambio  $p$  no divide a  $m$ , entonces se tiene que  $p$  y  $m$  son coprimos (es decir el único divisor en común natural que comparten es el 1). Demostremos esta afirmación. Sea  $d$  el máximo común divisor, entonces  $d|p$  que es primo; luego  $d=1$  o  $d=p$ . Si  $d=p$  entonces tendríamos que  $p=d|m$ , que contradice la hipótesis. Por lo tanto,  $d=1$ . Ahora tenemos que  $p|m \cdot n$  y  $(p:m)=1$ , entonces por una propiedad vista en clase (que para este problema es hipótesis implícita) tenemos que  $p|n$ .

En cuanto a propiedades donde se utiliza el método constructivo podemos enunciar el siguiente teorema que permite decidir cuándo una ecuación del estilo  $a \cdot x + b \cdot y = c$  con  $a, b, c$  enteros tiene solución entera, y si la tiene cómo son sus soluciones<sup>26</sup>.

---

<sup>26</sup> El teorema 3.2 enunciado se trabajará en más detalle en la propuesta de mejora que se encuentra en el Capítulo 5, donde presentamos actividades para trabajar la demostración matemática y utilizarla en problemas.

**TEOREMA 3.2.** Sean  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , con  $a$  y  $b$  no nulos. Si  $(a : b) \mid c$ , entonces las soluciones de la ecuación diofántica  $a \cdot x + b \cdot y = c$  son los pares  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  tales que

$$x = x_0 + k \cdot \frac{b}{(a : b)}, \quad y = y_0 - k \cdot \frac{a}{(a : b)}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

donde  $(x_0, y_0)$  es una solución particular de la ecuación.

En la demostración se exhibe un algoritmo para encontrar las soluciones de la ecuación diofántica para cualquier terna  $a, b, c$  de enteros de manera que  $(a:b)$  sea divisor de  $c$ . El método constructivo se usa cuando se quiere probar la existencia de un determinado objeto matemático, en este caso la existencia de soluciones de la ecuación diofántica.

En cuanto al método por casos podemos citar el algoritmo de división de dos números enteros

**Teorema 4.3.1.** (Algoritmo de división.)

Dados  $a, d \in \mathbb{Z}$  con  $d \neq 0$ , existen  $k, r \in \mathbb{Z}$  que satisfacen

$$a = k \cdot d + r \quad \text{con} \quad 0 \leq r < |d|.$$

Además,  $k$  y  $r$  son únicos en tales condiciones.

La tesis de este teorema presenta la existencia de  $k$  y  $r$  enteros y la unicidad de los mismos (la del cociente  $k$  y del resto  $r$  de manera que  $a=k \cdot d+r$ ). Para demostrar la existencia de  $k$  y  $r$  se consideran los casos:  $a \geq 0$  y  $d > 0$ ,  $a \geq 0$  y  $d < 0$  y  $a < 0$ . En la demostración por casos, si la hipótesis  $H$  es de la forma  $H_1$  o  $H_2$  o  $H_3$ , entonces para probar que  $H \rightarrow T$  basta probar que  $H_1 \rightarrow T$  o  $H_2 \rightarrow T$  o  $H_3 \rightarrow T$ . En este caso la hipótesis  $H$  son los enteros  $a, d$  tales que  $d$  es distinto de cero, y se descompone en los casos mencionados arriba. Para cada uno de ellos se demuestra que existen  $k$  y  $r$  de manera que  $a=k \cdot d+r$ .

Otro teorema que utiliza el método por casos es el Teorema Fundamental de la Aritmética que afirma que todo número entero distinto de 1, -1 y 0 se puede escribir de manera única como producto de primos. En la demostración primeramente se prueba que todo número natural mayor que 1 se factoriza como producto de primos y luego, usando este resultado se prueba para los números enteros negativos.

### Procedimiento matemático: estilo

El estilo usado en las demostraciones matemáticas de este TFE es el algebraico-aritmético donde se caracteriza por la utilización y manipulación de símbolos para representar los objetos y operar sobre ellos. No presentamos ejemplos que muestren el estilo ya que se puede observar el mismo en los presentados en los apartados anteriores.

### Procedimiento de exposición: modos

Según Ibañes y Ortega (1997) hay dos modos de exposición de las demostraciones matemáticas:

- **Modo sintético o directo:** Es el método propio de la presentación formalizada como producto final. Se utilizan conceptos básicos para argumentar.
- **Modo analítico o indirecto:** se utilizan elementos que ya han sido justificados anteriormente. Se basa en reemplazar cada teorema por otro más simple hasta llegar a otro demostrado. Es el modo de presentación generalmente más adecuado para las exposiciones didácticas.

En Álgebra I, muchas de las demostraciones matemáticas que los estudiantes tienen que realizar siguen el modo sintético o directo, ya que son sencillas y utilizan conceptos básicos. Algunas demostraciones propuestas en teoremas de números enteros siguen el modo indirecto o sintético, ya que para demostrarlas se basan en otros resultados ya probados. A continuación, damos un ejemplo de cada uno de ellos.

En el siguiente ejemplo se encuentra una propiedad cuya exposición sigue el modo sintético o directo, ya que utiliza solamente la definición de divisibilidad (concepto básico en la teoría de números enteros).

4. Si  $a \mid b$  y  $b \mid c$  entonces  $a \mid c$ .

En efecto, si  $a \mid b$  existe  $q \in \mathbb{Z}$  tal que  $b = q \cdot a$ . Si además  $b \mid c$ , existe  $q' \in \mathbb{Z}$  tal que  $c = q' \cdot b$ . Entonces  $c = q' \cdot (q \cdot a) = (q' \cdot q) \cdot a$ .

Dado que  $a \mid b$  y  $b \mid c$  se tiene usando directamente la definición de divisibilidad que  $a \mid c$ .

El siguiente ejemplo sigue el modo analítico o indirecto de exposición, ya que utiliza para demostrarlo las siguientes propiedades:

- Todo número entero distinto de 0, 1 y -1 tiene un primo que lo divide,
- Si  $a|b$  y  $a|c$  entonces  $a|b-c$ ,
- La restricción para la definición de número primo: sea  $p$  un número entero distinto de 0, 1 y -1, se dice primo si los únicos divisores son 1, -1,  $p$  y  $-p$ .

**Corolario 4.6.2. (Cantidad de primos.)**

*Existen infinitos primos (positivos) distintos.*

*Demostración.* Supongamos que no es así y que hay sólo un número finito  $N$  de primos positivos. O sea que el conjunto  $\mathcal{P}$  de primos positivos es  $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_N\}$ . Consideremos entonces el siguiente número natural  $M$ :

$$M := p_1 \cdot p_2 \cdots p_N + 1.$$

Dado que  $M \geq 2$  pues  $2 \in \mathcal{P}$ , existe por la proposición anterior un primo positivo  $p_i \in \mathcal{P}$  que divide a  $M$ . Pero

$$p_i | M \quad \text{y} \quad p_i | p_1 \cdot p_2 \cdots p_N \quad \implies \quad p_i | 1,$$

contradicción que proviene de suponer que hay sólo finitos primos.  $\square$

En esta demostración faltaría, quizás una explicación de cómo se construye el número  $M$  y cuál es la importancia de dicho número para la demostración.

Aunque algunas de las demostraciones sigan, según esta clasificación sobre la exposición, un modo u otro, se intenta en las actividades propuestas para los estudiantes que se trabajen con el reconocimiento e interpretación de cada parte del teorema, con ejemplos que cumplan la hipótesis y con un análisis de la validez de la tesis.

A modo de conclusión de esta sección podemos decir que, al ser una materia con contenidos algebraicos, el estilo utilizado es el algebraico (manipulación y operación con símbolos que tienen un significado). Incluimos también un estilo aritmético, pero en este caso las manipulaciones de los números permiten la comprensión de una propiedad o definición. Por otro lado, seguimos los dos modos de exposición de las demostraciones propuestos por Ibañez y Ortega (1997): el analítico y sintético.

La estructura de la mayoría de los enunciados propuestos en las actividades tiene el formato: “Si A entonces B”, o “A si y solo si B”. Creemos que podemos agregar más enunciados en otros formatos, como: “Existe A”, “Para todo A”. En estos tipos de estructura al no presentarse de la forma  $A \rightarrow B$ , presentan una dificultad adicional: el reconocimiento de la hipótesis y tesis. También pensamos que es importante agregar propiedades cuya tesis esté escrita no solo como una proposición simple sino también en la forma A o B, A y B.

Por último, reflexionamos también que es importante agregar a la lectura de teoremas y demostraciones preguntas que permitan comprender sus pasos, sus alcances, sus límites y sus aplicaciones a nuevos problemas.

#### **4.4 C3: Las funciones de la demostración matemática y su enseñanza**

de Villiers (1993)<sup>27</sup> presenta un modelo sobre las funciones de la demostración matemática, en el mundo matemático y en el aula, que clasifica a las mismas en las siguiente cinco:

1. Verificación o convicción: concerniente a la veracidad de una afirmación.
2. Explicación: Se exhiben los por qué de la verdad.
3. Sistematización: organiza diversos resultados en un sistema que incluye axiomas, conceptos básicos y teoremas.
4. Descubrimiento o creación: cuando la demostración de un teorema lleva implícita la demostración de otros y permite el descubrimiento de nuevos teoremas.
5. Comunicación: la transmisión del conocimiento matemático.

En esta sección, vamos a usar esta clasificación de de Villiers para analizar las funciones de la demostración matemática tanto en los teoremas que se encuentran en los textos que los estudiantes utilizan como en las actividades demostrativas propuestas en la materia.

Con este análisis se puede observar la propuesta del docente cuando propone un problema relacionado con la demostración a los estudiantes: verificativa, explicativa, de

---

<sup>27</sup> En el Capítulo 1, sección 1.3, se encuentra desarrollada las funciones de la demostración matemática.

sistematización, de descubrimiento o de comunicación. El foco de este TFE no es analizar cómo los libros de textos presentan una demostración matemática, sino qué funciones cumplen las actividades propuestas para producir habilidades en los estudiantes.

En el siguiente cuadro se muestra las **funciones de la demostración matemática** usadas en las actividades de Álgebra I.

Verificación	Uso frecuente
Explicación	Uso frecuente
Sistematización	Uso poco frecuente
Descubrimiento	Uso poco frecuente
Comunicación	Uso frecuente

A continuación, desarrollamos el cuadro.

Revisitando el aula podemos observar que en la mayoría de las actividades donde los estudiantes tienen que demostrar una propiedad matemática o tienen que leer la demostración de un teorema se observa la función de *verificación o convicción*, ya que la demostración justifica la verdad de la afirmación enunciada.

Un ejemplo de esta función puede apreciarse en la siguiente resolución:

4. Si  $a \mid b$  y  $b \mid c$  entonces  $a \mid c$ .

En efecto, si  $a \mid b$  existe  $q \in \mathbb{Z}$  tal que  $b = q \cdot a$ . Si además  $b \mid c$ , existe  $q' \in \mathbb{Z}$  tal que  $c = q' \cdot b$ . Entonces  $c = q' \cdot (q \cdot a) = (q' \cdot q) \cdot a$ .

En este caso la prueba matemática establece la verdad de la afirmación propuesta sobre divisibilidad.

La siguiente proposición forma parte de un encuentro sincrónico, en donde se explicita algunas propiedades de divisibilidad y del máximo común divisor. En la demostración de dicha propiedad se puede observar la *función explicación* de una demostración matemática.

**Proposición 4.5.12. (Propiedades esenciales de divisibilidad con coprimalidad.)**

Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  con  $c \neq 0$  y  $d \neq 0$ . Entonces

1.  $c \mid a, d \mid a$  y  $c \perp d \implies cd \mid a$ .

2.  $d \mid ab$  y  $d \perp a \implies d \mid b$ .

Observemos que estas afirmaciones no son ciertas si no se piden las propiedades de coprimalidad. Por ejemplo  $6 \mid 12$  y  $4 \mid 12$  pero  $24 \nmid 12$ , y  $6 \mid 2 \cdot 3 \nRightarrow 6 \mid 2$  o  $6 \mid 3$ . Por otro lado, las recíprocas siempre valen:  $cd \mid a \Rightarrow c \mid a$  y  $d \mid a$ , y  $d \mid b \Rightarrow d \mid ab$ . Luego podemos reformular la Proposición 4.5.12 de la manera siguiente:

1. Sea  $c \perp d$ . Entonces  $c \mid a, d \mid a \Leftrightarrow cd \mid a$ .

2. Sea  $d \perp a$ . Entonces  $d \mid ab \Leftrightarrow d \mid b$ .

*Demostración.* 1.  $c \perp d \Rightarrow 1 = sc + td \Rightarrow a = s(ca) + t(da)$ , pero  $d \mid a \Rightarrow cd \mid ca$  y  $c \mid a \Rightarrow cd \mid da$ , luego  $cd \mid s(ca) + t(da) = a$ .

2.  $d \perp a \Rightarrow 1 = sd + ta$ , luego  $b = (sb)d + t(ab)$ , pero  $d \mid ab$ , y  $d \mid d$ . Por lo tanto,  $d \mid (sb)d + t(ab) = b$ .

□

En esta demostración se puede observar explicaciones de por qué es necesario agregar la hipótesis de la coprimalidad de los números enteros. Por ejemplo, si pedimos solamente como hipótesis  $c \mid a$  y  $d \mid a$  no es cierto que  $cd \mid a$ . Pero si pedimos además que  $(c,d)=1$  ( $c$  y  $d$  no tenga divisores comunes naturales salvo el 1), entonces la tesis es cierta. También se observa que se explica que la recíproca es válida, formulándose la proposición como una doble implicación, bajo cierta restricción.

En Álgebra I se trabajan actividades en las cuales se les pregunta a los estudiantes que expliquen por qué se presentan ciertas condiciones para la validez de un teorema, la justificación de la demostración de una propiedad matemática, que apliquen un teorema a la resolución de un problema o que justifiquen todos los pasos de una determinada argumentación. Muchas de estas actividades forman parte de las puestas en común que se realizan en los encuentros sincrónicos. A continuación, damos dos ejemplos.

En este primer ejemplo se les propone a los estudiantes que demuestren que 48 divide a  $7^{2n}-1$  para todo  $n$  natural. Los estudiantes tienen indicar los pasos necesarios para realizar la demostración, por lo que tienen que realizar explicaciones de cada uno de sus

argumentos, indicando explícitamente cada paso de la demostración dada por el Método de Inducción Completa.

Pregunta 1  
Finalizado  
Puntúa 3,00 sobre 3,00  
🔧 Editar pregunta

Las siguientes afirmaciones matemáticas se pueden demostrar por el Principio de Inducción. Elegí **solo una de ellas** y realiza una demostración usando este principio:

a)  $7^{2n} - 1$  es divisible por 48, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

b) La suma de primeros  $n$  números impares es  $n^2$ , es decir  $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Para ello indicar:

- Quién es la proposición  $p(n)$  que se quiere demostrar para cada  $n \in \mathbb{N}$ .
- Quién es el caso base y cómo se demuestra que es cierto.
- Cuál es la hipótesis inductiva y cómo se usa.

Adjuntar tu resolución, que sea lo más clara posible.

indicaciones:

- \* La proposición  $P(n)$  que se quiere demostrar para todo  $n$  que pertenece a los naturales es  $7^{(2n)}-1$  es divisible por 48.
- \* El caso base es  $P(1)$ , y se demuestra reemplazando  $n$  por 1 en la formula a demostrar que es  $7^{(2n)}-1$ .
- \* La hipótesis inductiva es:  
 $n=k$   
 $7^{(2k)}-1$

y se usa para demostrar  $P(n)$  de alguna manera reemplazando en la formula que queremos demostrar con algo de la hipótesis que sabemos que es verdad .

Un teorema relacionado con la noción de divisibilidad es el Algoritmo de división de números enteros que afirma que si tenemos dos números enteros  $a$  y  $b$  con  $b$  distinto de cero, entonces existen únicos  $q$  y  $r$  enteros tales que  $a=b.q+r$  con  $0 \leq r < |b|$ .

En la siguiente actividad se les propone a los estudiantes una serie de preguntas que permiten la comprensión de dicho teorema.

Problema

1. Dividí 75 por 12 restando sucesivamente 12 de 75 e indicar el cociente y el resto de la misma. Mostrá que como el resto tiene que ser menor que el divisor, esta condición conlleva la unicidad tanto del cociente como del resto.
2. Calculá el resto y el cociente de la división de 76 por 57 y de 125 por 214.
3. Calculá el resto y cociente de la división de  $a$  por  $b$  cuando  $b$  es mayor que  $a$ . Verificar que son únicos. ¿Cómo calcular el resto y cociente de la división de  $a$  por  $b$  cuando  $a$  es mayor que  $b$ ?
4. ¿Qué ocurriría si no pudiéramos que el resto sea menor que el divisor?

### Preguntas sobre lo trabajado

Los invitamos a contestar en [el foro de intercambios algunas de las siguientes cuestiones trabajadas](#):

1. ¿Por qué en el algoritmo de división en los enteros se pide que el resto  $r$  cumpla la condición de que  $0 \leq r < |d|$ ? ¿Qué ocurre si se elimina dicha condición?
2. Si queremos calcular el resto de dividir  $231^{2311}$  por 5, es necesario recurrir al algoritmo de división?
3. Si  $r_3(a) = 1$ , entonces ¿ $a \equiv 1 \pmod{3}$ ? ¿Vale la recíproca?

No encontramos, en las actividades escritas, preguntas que permitan reflexionar sobre una demostración matemática, si así en los encuentros sincrónicos grabados. Nos parece importante agregar a las guías de ejercicios prácticos o cuestionarios este tipo de actividades porque permite a los estudiantes explicar y justificar los pasos de una demostración matemática.

Revisitando el aula virtual de Álgebra I no encontramos tampoco registro de actividades que evidencien a la demostración en su *función de sistematización* como la clasificación que presenta de Villiers. Sin embargo, podemos pensar a esta función no en una demostración determinada de una proposición sino en la construcción de una teoría matemática. Por ejemplo, cuando queremos construir la noción de divisibilidad se presenta primero la definición con ejemplos, y algunas propiedades que se deducen de ellas. Más adelante se construye el algoritmo de división de números enteros y se discute que cuando el resto de dividir un número  $a$  por  $d$  es cero, entonces  $d$  es divisor de  $a$ .

El siguiente ejemplo corresponde a un encuentro sincrónico donde se define el concepto de divisibilidad dando ejemplos de números  $d$  y  $a$  que cumplen la definición y ejemplos que no la cumplen. Además, se presenta algunas propiedades que se deducen directamente de la definición.

### Definición

Sean  $a, d \in \mathbb{Z}$  con  $d \neq 0$ . Se dice que  $d$  **divide** a  $a$ , (ó que  $a$  es divisible por  $d$ , ó que  $a$  es múltiplo de  $d$  ó que  $d$  es divisor de  $a$ ), si existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $a = k \cdot d$

**Notación:**  $d \mid a$ . Se lee " $d$  divide a  $a$ ". Si  $d$  no divide a  $a$  lo notaremos  $d \nmid a$

### Propiedades de la divisibilidad

**Observación:** Si  $d$  divide a  $a$ , entonces  $\frac{a}{d} \in \mathbb{Z}$ .

#### Ejemplos:

- $2 \mid 6$  pues  $6 = 3 \cdot 2$ .
- $7 \mid 63$  pues  $63 = 9 \cdot 7$ .
- $7 \mid -63$  pues  $-63 = (-9) \cdot 7$ .
- $7 \nmid 62$ .
- $3 \mid 0$  pues  $0 = 0 \cdot 3$ .

#### Propiedad 1

Si  $d \in \mathbb{Z} - \{0\}$  entonces  $d \mid 0$ . Es decir, todo número entero distinto de 0 divide a 0.

**Demo:**  $d \mid 0$  si existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $0 = k \cdot d$ . Tomando  $k = 0$ , queda  $0 = 0 \cdot d$ .

#### Propiedad 2

$d \mid a \Leftrightarrow -d \mid a$ .

En efecto,  $d \mid a$  si y solo si  $a = k \cdot d$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ , si y solo si  $a = (-k) \cdot (-d)$  si y solo si  $-d \mid a$ .

Analizando esta actividad se puede observar que a este tipo de presentación de las propiedades y definiciones de una teoría se le puede agregar preguntas de porqué se define la divisibilidad en enteros y no en los reales y si pueden enunciar otras propiedades que se deducen de la divisibilidad.

La función de la demostración matemática como *descubrimiento o creación* se observa en muy pocas de las demostraciones que se presentan en los teoremas que analizan los estudiantes. Un posible ejemplo de ello, es la demostración de la siguiente propiedad:

**TEOREMA 3.2.** Sean  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , con  $a$  y  $b$  no nulos. Si  $(a : b) \mid c$ , entonces las soluciones de la ecuación diofántica  $a \cdot x + b \cdot y = c$  son los pares  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  tales que

$$x = x_0 + k \cdot \frac{b}{(a : b)}, \quad y = y_0 - k \cdot \frac{a}{(a : b)}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

donde  $(x_0, y_0)$  es una solución particular de la ecuación.

La demostración de dicha propiedad da un algoritmo para encontrar, bajo ciertas condiciones de  $a$ ,  $b$  y  $c$ , las soluciones enteras de la ecuación  $ax+by=c$  (2). A continuación, extraemos una parte de la misma.

Veamos cómo son **todas** las soluciones de (2) cuando  $(a : b)$  divide a  $c$ . En primer lugar, podemos dividir ambos miembros de (2) por  $(a : b)$ , obteniendo la nueva ecuación:

$$\frac{a}{(a : b)} \cdot x + \frac{b}{(a : b)} \cdot y = \frac{c}{(a : b)}$$

Esta ecuación tiene las mismas soluciones en  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  que la original (se puede pasar de una ecuación a la otra simplemente multiplicando o dividiendo por  $(a : b)$ ). Si llamamos

$$\alpha = \frac{a}{(a : b)}, \beta = \frac{b}{(a : b)} \text{ y } \gamma = \frac{c}{(a : b)}, \text{ que son enteros, nos queda la ecuación:}$$

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \gamma$$

donde ahora  $(\alpha : \beta) = 1$  (observar que  $\alpha$  y  $\beta$  son coprimos porque hemos suprimido todos los factores comunes de  $a$  y  $b$ ). Supongamos que  $(x_0, y_0)$  es una solución de esta ecuación. Si  $(x, y)$  es otra solución, vale que  $\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \gamma = \alpha \cdot x_0 + \beta \cdot y_0$ ; entonces:

$$\alpha \cdot (x - x_0) = -\beta \cdot (y - y_0)$$

De esta igualdad deducimos que  $\beta \mid \alpha \cdot (x - x_0)$  y, como  $(\alpha : \beta) = 1$ , entonces  $\beta \mid x - x_0$  (ver la Proposición 2.4 del capítulo 2); luego, existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $x - x_0 = k \cdot \beta$ .

Esta función también se encuentra reflejada, con más frecuencia, en las actividades demostrativas propuestas en problemas donde los estudiantes tienen conjeturar una propiedad. Por ejemplo, en la siguiente actividad donde los estudiantes tienen que proponer a partir de la comprensión del Teorema Fundamental de la Aritmética una propiedad que relaciona los factores primos de  $a$  y  $b$  con los de  $a \cdot b$ .

**1) Si  $a$  y  $b$  son dos números enteros entonces  $a \cdot b$  tiene exactamente los mismos primos que  $a$  y  $b$  en su factorización. ¿Qué puedes decir de esta afirmación? ¿Es verdadera? ¿Es falsa?**

**2) ¿Puede ocurrir que  $a$  y  $a^3$  tenga algún primo distinto? En caso afirmativa, proponer una proposición matemática que deduzca a partir de la factorización en primos de  $a$  la de  $a^3$ .**

La función de *comunicación* considera a las demostraciones matemáticas como una forma de discurso donde la misma transmite un conocimiento matemático.

En el ejemplo a continuación se observa esta función en el intento de construir el algoritmo de división y su demostración. Se articula una forma de discurso, la construcción escolar de quién es el resto y el cociente de dicha división. En este caso se divide  $a$  y  $b$  (números naturales) cuando  $a < b$  y  $a > b$ , como restas sucesivas, y se interpreta

quiénes son el resto y cociente en cada caso. En un trabajo posterior se estudian los casos en que  $a$  y  $b$  tienen signo. Se construye, así el algoritmo de división para cualesquiera  $a$  y  $b$  enteros. Esta forma de presentación del algoritmo de división muestra una clara intención de comunicar la equivalencia entre el algoritmo escolar y el presentado en Álgebra I.

❶ Dividí 75 por 12 restando sucesivamente 12 de 75 e indicá el cociente y el resto de la misma. Mostrá que la condición impuesta sobre el resto conlleva la unicidad del resto y del cociente.

$$\begin{aligned}
 75 - 12 &= 63 \\
 63 - 12 &= 51 \\
 51 - 12 &= 39 \\
 39 - 12 &= 27 \\
 27 - 12 &= 15 \\
 15 - 12 &= 3
 \end{aligned}$$

Luego,  $75 - 6 \cdot 12 = 3$ , es decir  $75 = \underbrace{6}_{\text{cociente}} \cdot 12 + \underbrace{3}_{\text{resto}}$ . Dicho de otra manera, 12 entra 6 veces en 75 y me sobran 3. Notemos que el resto  $r = 3$  es menor que el divisor  $d = 12$  y además  $r \geq 0$ .

❷ Calculá el resto y el cociente de la división de 76 por 57 y de 125 por 214.

- $76 = \underbrace{1}_{\text{cociente}} \cdot 57 + \underbrace{19}_{\text{resto}}$
- $125 = \underbrace{0}_{\text{cociente}} \cdot 214 + \underbrace{125}_{\text{resto}}$

❸ Calculá el resto y cociente de la división de  $a$  por  $b$  cuando  $b$  es mayor que  $a$ . Verificá que son únicos. En este caso nos queda que  $a = 0 \cdot b + a$ , donde  $a < b$ . Si  $a > b$ , en este caso  $a$  es el **dividendo**, el que va a ser dividido; y  $b$  el que va a **dividir al anterior**, el **divisor**. Lo que hacemos es comenzar a restar sucesivamente el divisor del dividendo, calculando en cada paso un resto.

$$\begin{aligned}
 a - b &= r_1 \\
 r_1 - b &= r_2 \\
 r_2 - b &= r_3 \\
 &\vdots \\
 r_{n-1} - b &= r_n, \text{ con } 0 \leq r_n < b.
 \end{aligned}$$

Este proceso se termina cuando obtenemos un resto  $r_n$  (mayor o igual que 0) que sea menor que el divisor. El número de veces  $n$  que hemos restado el divisor del dividendo se denomina el cociente. En estas condiciones, resulta que

$$a = \underbrace{n}_{\text{cociente}} \cdot b + \underbrace{r_n}_{\text{resto}}.$$

Es decir, el algoritmo de división, toma como datos de entrada dos números, el dividendo y el divisor ( $a$  y  $b$ ), y proporciona después de algunos cálculos dos nuevos números: el cociente y el resto,  $n$  y  $r_n$ , respectivamente, tales que  $a = n \cdot b + r_n$  con la condición de que  $0 \leq r_n < b$ . La experiencia escolar indica que  $n$  y  $r_n$  son únicos, bajo la condición anterior.

Lo que acabamos de describir es el algoritmo de división con números naturales.

La función de comunicación está relacionada a la de la explicación, ya que para que la demostración comunique es necesario que contenga justificaciones y claridad en las explicaciones; por lo que es necesario también prestar atención a los distintos tipos de lenguaje que presenta. Por eso también es importante observar cuál es el uso del lenguaje simbólico que utiliza, si el vocabulario es comprensible, si el lenguaje es explicativo o argumentativo y si se realiza transformaciones del lenguaje simbólico o verbal. En este punto podemos observar que, en las mayorías de las demostraciones propuestas en Álgebra I, y que se encuentran ejemplificadas en los apartados anteriores, el lenguaje

empleado es el argumentativo y explicativo en donde se usan el lenguaje coloquial y simbólico.

Las funciones de de Villiers que son presentadas para las demostraciones matemáticas, se extendieron en este TFE también a las actividades demostrativas, porque se busca poner de manifiesto las habilidades matemáticas que se quieren desarrollar con los estudiantes como: explorar, conjeturar y argumentar, que no se producen con solamente la resolución de problemas que solo requieren de la aplicación de algoritmos.

#### **4.5 C4: Discusión acerca de los modos de enseñar la demostración**

En este apartado vamos a analizar nuestra propuesta de enseñanza focalizando nuestra mirada en las cuatro actividades que fueron presentadas en la sección 3.2 del Capítulo 3 por considerarlas las más pertinentes al objeto de estudio de este TFE. Para este análisis vamos a tener en cuenta lo observado en las secciones 4.2, 4.3 y 4.4 de este capítulo y las recomendaciones de Balacheff (1982, 2000) y Maggio (2018).

Las cuatro actividades a las que hacemos referencia son las siguientes:

**Actividad 1: Decidí cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo  $a, b, c, d$  enteros y  $d$  distinto de cero. Si son falsas muestra un contraejemplo y si son verdaderas proponé algunos ejemplos.**

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| a) Si $d a$ y $d b$ entonces $d a+b$ | d) Si $d a \cdot b$ entonces $d a$         |
| b) Si $d a+b$ entonces $d a$ y $d b$ | e) Si $d a$ entonces $d^3 a^3$             |
| c) Si $d a$ entonces $d a \cdot b$   | f) Si $6 a \cdot b$ entonces $6 a$ o $6 b$ |

**Elige una afirmación que consideraste verdadera y justifica el porqué de tu respuesta.**

**Actividad 2:**

- a) Sean  $a, b$  enteros. Se  $p$  primo tal que  $p$  divide a  $a^3 \cdot b^2$ . Mostrá que  $p$  divide a  $a$  o  $p$  divide a  $b$ .
- b) Sea  $a$  entero impar. Mostrá que el máximo común divisor entre  $a$  y  $a+2$  es 1, o sea  $(a:a+2)=1$

c) Sean  $p$  es primo y  $a$  es entero. Mostrá que la siguiente afirmación es verdadera: “Si  $p|a^3$  entonces  $p|a$ ”.

**Actividad 3:**

1) Leé el Teorema Fundamental de la Aritmética que se encuentra en el libro de Teresa Krick *Álgebra I*, Capítulo 4, Teorema 4.6.5, páginas 150-151. Da ejemplos. Si un número es primo ¿Cómo se puede aplicar esta propiedad?

2) Si  $a$  y  $b$  son dos números enteros entonces  $a \cdot b$  tiene exactamente los mismos primos que  $a$  y  $b$  en su factorización. ¿Qué puedes decir de esta afirmación? ¿Es verdadera? ¿Es falsa?

3) Sean  $p$  primo y  $a$  entero. Prueba que la siguiente afirmación es verdadera:  $p|a$  si y solo si  $p$  aparece en la factorización de  $a$ .

4) Decidí si existen enteros  $a$  y  $b$  no nulos que satisfagan que:  $a^2=8b^2$

**Actividad 4:** Sean  $a, b, c$  tres números enteros, con  $a$  y  $b$  no ceros y consideramos la ecuación lineal:

$$ax+by=c.$$

1) Explora con determinados valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  y determina si existen  $x$ ,  $y$  enteros tales que verifican la ecuación, es decir es solución de la ecuación.

2) A partir de los ejemplos, contesta la siguiente pregunta: ¿Cuándo este tipo de ecuaciones no tiene solución entera?

3) ¿Qué representa gráficamente las soluciones de dicha ecuación?

4) Leé la proposición 5.1.2 (Ecuación diofántica y máximo común divisor) del Libro *Algebra I de Teresa Krick*, página 172 y analiza si podemos contestar la pregunta del ítem 2). ¿Se puede aplicar esta propiedad si buscamos la solución real de dicha ecuación?

## **Modalidad de trabajo en Álgebra I**

En las clases en la presencialidad se trabaja de dos maneras distintas, de acuerdo al tema:

1. Resolución de problemas que permite construir una definición o propiedad y se apoya en los conocimientos previos. Más precisamente, se trabaja en pequeños grupos con problemas que ponen en juego la necesidad de una definición, de una propiedad matemática o una demostración. Posteriormente, en la puesta en común se trabaja con las distintas resoluciones de los estudiantes y se construye entre todos los conceptos.
2. Combinación de explicaciones del docente sobre la definición a estudiar y sus propiedades con preguntas que permiten la reflexión sobre la necesidad de una nueva definición. Posteriormente, resolución en pequeños grupos de una actividad que permite aplicar lo estudiado o lectura reflexiva de una demostración matemática con preguntas.

En la virtualidad esta dinámica fue reemplazada por videos explicativos con preguntas y foros de intercambio desde el aula virtual. En estos foros o videos se presentan preguntas donde los estudiantes tienen que reflexionar sobre algún tema y compartir sus producciones. Estos foros duran una semana y son flexibles a los tiempos de estudio de los estudiantes; esta dinámica es flexible con lo que Maggio denomina la expansión de los límites de la clase. Estos foros permiten que los estudiantes puedan leer las respuestas y argumentos de sus compañeros, participen en los debates, argumenten sobre las explicaciones de los otros, armen nuevas conjeturas y explicaciones a partir de las producciones. Estas producciones son recuperadas en los encuentros sincrónicos, en donde avanzamos hacia la construcción de una definición, propiedad o demostración matemática.

## **Análisis de las actividades presentadas**

Estas actividades fueron diseñadas para el segundo cuatrimestre 2020, algunas fueron trabajadas en los encuentros sincrónicos preparadas para una clase y otras forman parte de actividades que se discuten en los foros, de entregas obligatorias o de actividades de

las guías de ejercicios prácticos que pueden consultar en las tutorías o en los foros de consultas.

### **Actividad 1:**

Esta actividad requiere que los estudiantes:

1. Comprendan y apliquen la definición de divisibilidad.
2. Identifiquen cuando una proposición matemática es verdadera o falsa y argumenten su elección.

Esta actividad forma parte de un cuestionario ofrecido a los estudiantes en el aula virtual. Tiene dos objetivos: por un lado, la comprensión de la definición de divisibilidad a través de su aplicación directa en propiedades, y por otro, el trabajo con las argumentaciones matemáticas para analizar el valor de verdad de una proposición. Cabe mencionar que los estudiantes conocen la definición de divisibilidad ya que fue trabajada previamente.

Las actividades demostrativas que se propone esta actividad son: explorar, definir, argumentar y demostrar. Los estudiantes tienen que analizar el valor de verdad de cada una de las proposiciones matemáticas enunciadas. Para ello, se le propone que exploren con ejemplos. Algunas de las proposiciones son verdaderas y otras son falsas. Para las verdaderas se les propone que ejemplifiquen dando valores o que elijan alguna de ellas y justifiquen el por qué lo es. Para realizar estas demostraciones se utilizan directamente la definición de divisibilidad. Por ejemplo en el ítem d) los estudiantes sabiendo que  $d|a$  tienen que demostrar que  $d|a.b$ ; para ello usan qué significa que  $d$  es divisor de  $a$ , o sea  $a=d.q$  con  $q$  entero y deducen que si multiplicamos por  $b$  tenemos que  $a.b=d.b.q$  o que es lo mismo  $d|ab$ . Otras proposiciones matemáticas son falsas, por lo que tienen que dar un contraejemplo que muestren dicho valor de verdad. Por ejemplo, el ítem b), tenemos que  $2|3+1$  pero  $2$  no divide ni a  $3$  ni a  $1$ .

Todas las proposiciones matemáticas enunciadas son de implicación simple en el formato si  $A$  entonces  $B$ . La actividad no propone un trabajo con la validez del recíproco, aunque a) y b) son recíprocos y c) y d) también. Los modos de demostración de todas las proposiciones matemáticas verdaderas siguen el método directo. El estilo usado para realizar las argumentaciones matemáticas es el algebraico con una propuesta aritmética

de ejemplificación de los enunciados escritos con símbolos. El modo de exposición de las demostraciones matemáticas que los estudiantes presentan sigue el modo directo o sintético, ya que para demostrar las proposiciones verdaderas se utiliza una definición.

No podemos analizar la función de la demostración matemática en este problema porque se trabaja cuestiones previas a ella. Podemos si analizar las funciones de la actividad demostrativa, siguiendo la clasificación de de Villiers. La función principal que tiene este problema es el de descubrimiento a partir de la exploración del valor de verdad de cada proposición enunciada, junto con la explicación clara de los argumentos para tal decisión. La actividad no comunica ningún conocimiento, la comunicación pasa por la claridad en la exposición de las argumentaciones en favor de la verdad o falsedad de las proposiciones.

Esta actividad fue diseñada para que los estudiantes trabajen con un cuestionario ofrecido en el aula virtual y que escriban sus producciones, para luego en un encuentro sincrónico discutirlos. Primeramente, los estudiantes dan ejemplos, ponen valores numéricos a las letras y observan las relaciones que se producen. Para poder decidir el valor de verdad, tienen que reconocer cuál es la hipótesis, cuál es la tesis y cuándo una proposición en el formato “si A entonces B”, es verdadera o falsa. En este punto la intervención docente es importante, para poder diferenciar cuándo dado que A es verdadera la expresión  $A \rightarrow B$  es verdadera y cuándo es falsa.

Pensamos que es necesario para una propuesta virtual y enriquecedor para una presencial, escribir en la actividad algunas de las preguntas que se trabajan en la clase sincrónica, haciendo explícito todo lo que con la actividad se quiere enseñar. Por ejemplo, ¿qué definición matemática atraviesa todas estas proposiciones? ¿cuál es la hipótesis? ¿cuál es la tesis? ¿cuándo una proposición de la forma  $A \rightarrow B$  es verdadera y cuándo es falsa? ¿qué tiene que cumplir los ejemplos encontrados para que dicha expresión sea verdadera? ¿qué tiene que cumplir los ejemplos para que sea falsa?

Pensamos también que es importante que escriban estas respuestas de manera general para que puedan ser reutilizadas en otros problemas. Por ejemplo, sabiendo que A es verdadero, entonces para que la implicación  $A \rightarrow B$  sea falsa, necesitamos que B sea falsa.

La ejemplificación de las proposiciones, es una actividad valiosa como primera aproximación a la decisión de que una proposición es verdadera o falsa. Esta exploración permite al estudiante intuir qué nos dice la propiedad y si se cumplen para todos los números que verifican la hipótesis o hay un par de números que no la cumplen. La intervención docente es necesaria en este punto para que los estudiantes diferencien entre ejemplos que permiten intuir la verdad de una proposición y ejemplos que muestran que una proposición es falsa.

Otro punto importante es el trabajo con las justificaciones de los estudiantes: trabajar en la clase con distintas formas de argumentar la verdad de una proposición matemática, cuál es el uso que se da a los símbolos en la escritura, como son las cadenas deductivas, si utilizan todos los datos para llegar a la tesis y si las utiliza cómo lo hacen. Aquí la intervención docente busca que los estudiantes logren diferenciar entre explicaciones intuitivas como manera de argumentar la verdad de una proposición, una prueba que puede ser aceptada por otro o la demostración que se aceptará en toda la clase. En la clase en los momentos de validación colectiva de lo producido, se consideran las explicaciones que dan los estudiantes para ver si adquieren el carácter de prueba (Balacheff, 1982). Los grupos de estudiantes suelen generar diferentes tipos de prueba, con diferentes niveles de deducción y simbología. Es oportuno ir avanzando en la escritura de estas pruebas para construir la demostración matemática que justifica la verdad de determinada proposición.

### **Actividad 2:**

Esta actividad requiere de los estudiantes:

- Comprensión de la definición de primo y de propiedades relacionadas con esta noción y la de máximo común divisor.
- Interpretar qué significa mostrar o demostrar una propiedad verdadera, identificando la hipótesis y la tesis.
- Realizar una demostración matemática usando las hipótesis de la propiedad enunciada e hipótesis implícitas.

Esta actividad forma parte de una guía práctica que los estudiantes resuelven de manera individual y que traen a un encuentro sincrónico en las que se exponen y discuten las argumentaciones.

La actividad demostrativa predominante en este problema es la de demostrar, ya que los estudiantes tienen que mostrar la validez de cada una de las afirmaciones propuestas. Para realizar estas demostraciones los estudiantes no solo tienen que utilizar la hipótesis sino también la definición de primo, máximo común divisor y si  $p$  es un divisor primo de  $a \cdot b$  entonces  $p$  es un divisor de  $a$  o de  $b$  (hipótesis implícitas). Se utiliza también la argumentación ya que los estudiantes tienen que dar las razones de por qué las proposiciones son verdaderas. Tienen que trabajar con ideas previas sobre propiedades y dar los argumentos necesarios para justificar la verdad.

Las proposiciones matemáticas enunciadas en el ítem a) y b) siguen la estructura  $A \rightarrow B$  (implicación directa). La proposición del ítem b) está enunciada de un modo diferente: Sea  $a$  un entero impar. Mostrá que  $(a:a+2)=1$ . Este enunciado trae la dificultad adicional de que los estudiantes tienen que indicar cuál es la hipótesis y cuál es la tesis (aquí  $a$  impar es la hipótesis y  $(a:a+2)=1$  es la tesis).

En los ítems a) y c) se usa el método directo. Para el ítem b) se usa la reducción al absurdo en el sentido siguiente: supongamos que  $(a:a+2) \neq 1$ , entonces existe un primo natural  $p$  que divide a los enteros  $a$  y  $a+2$  a la vez. Es decir,  $p|a$  y  $p|a+2$ . Por lo tanto,  $p|(a+2)-a$ , o sea  $p|2$ , entonces  $p=2$ . Pero así,  $2|a$  pero esto es un absurdo ya que  $a$  es impar.

El estilo matemático usado en las demostraciones es puramente algebraico. El modo de exposición es el analítico o indirecto ya que se utiliza en las demostraciones otras proposiciones matemáticas.

Con respecto a la función de la demostración en esta actividad demostrativa, se observa fundamentalmente la verificación, la explicación y la comunicación. Los estudiantes tienen que dar argumentos de la veracidad de las proposiciones, para ello tienen que poder explicar sus argumentaciones y sus cadenas de deducciones. En consecuencia, comunican sus justificaciones en la clase, haciéndola comprensible para otros.

La intervención docente en este problema busca que los estudiantes avancen en la escritura de las demostraciones matemáticas, sean conscientes de las propiedades que se pueden utilizar y cuáles no, cuál es la hipótesis, cuál es la tesis y qué tipos de argumentos se pueden usar para realizar la demostración y cómo se pueden escribir esos argumentos. En un encuentro sincrónico se trabaja con la escritura de las argumentaciones, poniendo el énfasis en qué se usa, cómo se usa y cómo se llega a una demostración de cada una de las propiedades.

Pensamos que para este tipo de actividades faltarían preguntas que permitan organizar las ideas para la demostración que realizan los estudiantes. Por ejemplo, ¿por qué el enunciado del problema dice mostrará qué? Dé argumentos en lenguaje coloquial de porqué es verdadera la afirmación, ¿puede ocurrir que haya un ejemplo que cumpla la hipótesis, pero no la tesis? ¿cómo se puede a partir de la hipótesis demostrar la verdad de la tesis? ¿alcanza solo con la hipótesis enunciada realizar la demostración? ¿se necesita alguna otra propiedad para demostrar la validez de la tesis? Enuncia un ejercicio que permita aplicar la proposición.

En enunciados del estilo “mostrará que” se da por sentado la verdad de la afirmación y lo que queda es realizar la demostración. En muchas oportunidades los estudiantes no perciben la necesidad de demostrar o no se preguntan por qué es verdadero o la importancia de dicha propiedad. Es importante también que los estudiantes ensayen argumentaciones, justificaciones, aunque sean confusas o incompletas. En un trabajo posterior se puede retomar todas esas producciones y arman una demostración que explique y dé argumentos de la veracidad de la tesis a partir de la veracidad de la hipótesis.

### **Actividad 3:**

Esta actividad requiere de los estudiantes:

- Lectura comprensiva de un teorema.
- Aplicación del enunciado del teorema en ejercicios prácticos.
- Comprensión del teorema para contestar preguntas o probar una afirmación matemática.

Esta actividad forma parte de un problema de desarrollo subido al aula virtual usando el cuestionario de desarrollo de Moodle. La propuesta es que los estudiantes resuelvan en grupos de trabajo y después en un encuentro sincrónico se exponen y discuten las argumentaciones.

Esta actividad permite la comprensión del Teorema Fundamental de la Aritmética. Se les pide a los estudiantes que realicen una lectura del enunciado del teorema, lo ejemplifiquen y analicen a partir de preguntas y aplicaciones a otros problemas. Entre las aplicaciones elegidas, se encuentra un enunciado en donde deben determinar si la afirmación es verdadera o falsa y que tiene que ver con la relación entre los factores primos de  $a$  y  $b$  con los de  $a \cdot b$ . También la actividad propone que den una demostración de una afirmación matemática. Por último, que den argumentos de la existencia o no de enteros  $a$  y  $b$  tales que  $a^2=8b^2$

Las actividades demostrativas requeridas son: explorar, definir, argumentar y demostrar. Los estudiantes exploran a través de ejemplos el enunciado del teorema. La intervención docente en este caso pasa por pedirles que los ejemplos sean no solo de números compuestos. Una pregunta posible es, si el número elegido es un primo ¿cuál es su factorización en primos? ¿es única? ¿cuál es? Los estudiantes también tienen que dar argumentos tanto de la verdad de una afirmación (ítem 2, 3) como de su falsedad (ítem 4). Para realizar las justificaciones de las proposiciones verdaderas los estudiantes tienen que realizar una demostración matemática que no solo dé argumentos de su verdad sino también que explique y comunique los por qué de la misma.

En esta actividad las proposiciones matemáticas no solo están enunciadas como una implicación simple, sino también como una doble implicación ( $A \leftrightarrow B$ ) y también usando el cuantificador existencial: “existe  $a$  y  $b$  enteros no nulos que satisfagan que  $a^2=8b^2$ ”.

Pensamos que se les puede preguntar a los estudiantes: ¿cómo se demuestra que es verdad una proposición  $A \leftrightarrow B$ ? ¿cuál es la hipótesis y cuál es la tesis? Es pertinente hacer un trabajo previo sobre este tipo de enunciados matemáticos ya que conlleva la dificultad de que  $A \leftrightarrow B$  es una forma corta de enunciado de la propiedad:  $A \rightarrow B$  y  $B \rightarrow A$ . Para el enunciado del ítem 2) se les puede proponer que expliquen cuándo una proposición matemática escrita en la forma “existe  $A$ ” es verdadera y cuándo es falsa.

Para las proposiciones verdaderas (ítem 2 y 3), el método de demostración es el directo y utiliza fuertemente el Teorema Fundamental de la Aritmética, más aún es una consecuencia directa de dicho teorema.

El estilo usado en los procedimientos realizados es puramente algebraico, se usa el aritmético solamente para ejemplificar el enunciado del teorema. El procedimiento de exposición utilizado es el analítico o indirecto ya que para demostrar las proposiciones matemáticas verdaderas es necesario utilizar no solo definiciones matemáticas sino también el Teorema Fundamental de la Aritmética. Además, trabajamos en clase con las demostraciones realizadas por los estudiantes, las analizamos y completamos con justificaciones de porqué es válida cada deducción realizada para llegar a la verdad de la tesis.

Con respecto a las funciones de la demostración que se propone en esta actividad son la de explicación, comunicación y verificación. Los estudiantes tienen que dar argumentos para establecer el porqué es verdadero las proposiciones matemáticas enunciadas en los ítems 2 y 3. Para realizar estas argumentaciones tienen que explicar, exhibir los por qué de dicha verdad y comunicar su producción en forma escrita a sus compañeros.

La intervención docente busca avanzar en la escritura de las demostraciones matemáticas. Para realizarlas los estudiantes no solamente utilizan la hipótesis sino también un teorema de mucha importancia para la factorización de números enteros. Una propuesta es que el docente tome alguna de las producciones de los estudiantes, y que entre todos analicen los pasos realizados dando argumentos y justificaciones de los mismos. Otro tipo de propuesta posible es que un estudiante explique la producción de un compañero. Al cerrar la clase se puede proponer la demostración matemática elegida para justificar la proposición matemática, dando argumentos de porqué dicha elección.

#### **Actividad 4:**

Esta actividad requiere de los estudiantes puedan:

- Conjeturar una propiedad a partir de la exploración con ciertos datos.

- Comprender que no se puede encontrar soluciones enteras de la ecuación lineal en cuestión como si el conjunto de soluciones fuese el de los números reales.
- Comprender la utilidad de una propiedad, sus límites y alcances.

Esta actividad forma parte de la guía de problemas sobre ecuaciones diofánticas. La propuesta es que se trabaje en pequeños grupos y después en un encuentro sincrónico se expongan y discutan las argumentaciones.

La actividad propone que los estudiantes exploren con diferentes valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  para determinar cuándo la ecuación  $ax+by=c$  tiene solución entera y cuándo no la tiene. A partir de esta exploración los estudiantes tienen que armar conjeturas que indiquen cuándo dicha ecuación no tiene solución entera. El armado de conjeturas fue trabajado en Introducción a la Matemática, por lo tanto, no se trabaja en esta actividad sobre cómo se observa patrones o cómo se enuncia una conjetura a partir de la observación.

En principio las conjeturas que los estudiantes propongan pueden provenir directamente de los ejemplos realizados. Un estudiante puede tomar como  $a=4$ ,  $b=8$  y  $c=16$  y decir que  $4x+8y=16$  tiene solución porque la expresión  $4x+8y=4(x+2y)$  y  $16=4 \cdot 4$  son múltiplos de 4. Una pregunta que se le puede hacer es ¿puede la ecuación  $4x+8y=2$  o la ecuación  $4x+8y=3$  no tener una solución entera? La intervención docente es importante para organizar la exploración realizada ya que las conjeturas pueden ser particulares sobre los ejemplos observados. Algunas posibles preguntas son: ¿la ecuación tiene solución entera si tomamos  $a=2$ ,  $b=4$  y  $c=2k$  para cualquier  $k$ ? ¿cuál es el máximo común divisor  $(a,b)$  en este caso? ¿ $(a:b)$  es divisor de  $c$ ? ¿Por qué? ¿la ecuación tiene solución entera si tomamos  $a=2$ ,  $b=4$  y  $c=2k+1$ ? Algunas de las conjeturas realizadas pueden no ser lo suficientemente generales para todos los casos  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Se puede proponer a los estudiantes que elijan aquellas conjeturas que son más generales y abarcan una gran cantidad de ejemplos.

Algunas de estas preguntas fueron realizadas en un encuentro sincrónico. Pensamos que es importante presentar algunas de estas preguntas en el enunciado de la actividad para ayudar a la observación de regularidades y armado de conjeturas escritos con lenguaje lógico.

La actividad demostrativa que se presenta en esta actividad es fundamentalmente el de la exploración y conjetura de una proposición matemática: “Dar las condiciones sobre  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que la ecuación  $ax+by=c$  no tenga solución entera”. Posteriormente se pide que los estudiantes realicen una lectura de un teorema relacionado con la pregunta ¿cuándo este tipo de ecuaciones no tiene solución entera? y que la contesten. Se les puede pedir a los estudiantes que contesten la pregunta enunciando una propiedad.

El enunciado de la proposición que tienen que leer los estudiantes es del tipo doble implicación: “ $ax+by=c$  tiene solución entera si y solo si  $(a:b)|c$ ”. Las conjeturas que proponen los estudiantes usan la implicación simple. No trabajamos en esta actividad con la demostración matemática por lo tanto no podemos indicar el método de demostración utilizada ni el modo de exposición de los procedimientos. En cuanto al estilo utilizado en esta actividad, es el aritmético para la exploración con números y el algebraico para el armado de una conjetura a partir de la visualización de patrones con dichos números.

Aunque la actividad no propone la realización de una demostración matemática, la función de esta actividad demostrativa es el descubrimiento o creación de una propiedad matemática a partir de la exploración con números y la observación y la organización de los ejemplos proporcionados.

En este capítulo se presentó el modo de trabajo y un recorrido por las Clases 3, 5 y 6 del aula virtual y se analizaron algunas actividades, con el foco puesto en las categorías de análisis, expuestas en el Capítulo 3. En esta última sección, se analizaron cuatro actividades seleccionadas también con estas categorías y realizando algunas consideraciones con miras a la propuesta de mejora.

En este análisis, se observaron predominantemente actividades de argumentación, uso de definiciones matemáticas y propiedades y actividades en donde se debe demostrar que una proposición matemática es verdadera o dar justificaciones de por qué es falsa. Este tipo de actividades se apoyan fuertemente en el trabajo realizado en Introducción a la Matemática, como ser: el uso del lenguaje simbólico, los valores de verdad de una proposición matemática enunciada con diferentes operaciones lógicas y el armado de una propiedad a partir de la exploración matemática.

Se observa también, en este análisis, la necesidad de preguntas que permitan la reflexión de una propiedad o de una demostración matemática y actividades de exploración para el armado de conjeturas.

En el capítulo siguiente se presenta una secuencia didáctica articulada con el trabajo realizado en Introducción a la Matemática, que amplía las actividades demostrativas.

## **Capítulo 5 Propuesta de mejora de Álgebra I: Secuencia didáctica y conclusiones**

En este capítulo presentamos una propuesta de mejora a través de una secuencia articulada con Introducción a la Matemática. Para ello reformulamos las actividades analizadas en la Sección 4.5 del Capítulo 4 e incluimos un posible modo de trabajo con ellos.

Esta secuencia didáctica tiene dos objetivos generales, por un lado, continuar con el trabajo propuesto en Introducción a la Matemática y que tienen que ver con explorar para producir una regularidad numérica, conjeturar una propiedad matemática, argumentar sobre la validez de una afirmación matemática, explicar un enunciado matemático y aplicarlo a ejercicios, realizar la prueba matemática para validar una afirmación. Por otro lado, avanzar en la comprensión de una demostración en matemática: de su estructura lógica, de las justificaciones de cada paso y de su aplicación a una situación problemática.

Esta secuencia consta de dos partes. En la primera parte, los estudiantes partiendo de enunciados matemáticos tienen que poder argumentar si son verdaderas o son falsas, usando en algunos casos la hipótesis y en otros también hipótesis implícitas. Luego avanza en la utilización de las proposiciones matemáticas verdaderas (propiedades) en

ejercicios o en preguntas de reflexión aplicados a casos particulares. Los tipos de ejercicios pueden ser de aplicación práctica o de argumentación matemática teórica, como así también pruebas formales que justifican una proposición. También incluyen actividades sobre la conjetura de una propiedad matemática a partir de la exploración numérica y la observación de regularidades o sobre las condiciones que tienen que imponerse para que una proposición se convierta en válida.

En la segunda parte se los invita a la lectura y posterior reflexión de un teorema en matemática y su demostración. Para ello se les pide que den ejemplos de dicha propiedad, analicen su alcance y sus límites y lo apliquen a ejercicios prácticos o preguntas más teóricas. Se incluye una guía secuenciada de preguntas que permite reflexionar cada uno de los pasos de la demostración matemática. La demostración de este teorema, además, contiene algunas técnicas de demostración, como, por ejemplo, la reducción por el absurdo y el principio de inducción, además del método deductivo con reducción de casos. También en esta segunda parte de la secuencia didáctica incluimos la demostración de un teorema realizada de manera constructiva, cuyos pasos incluyen la técnica de cuándo y cómo una ecuación lineal en dos variables tiene soluciones enteras.

### **5.1 Secuencia didáctica Parte 1**

La primera parte de esta secuencia didáctica consta de cuatro actividades. Los estudiantes pueden realizarlas en grupos de dos o tres personas. Luego, en la puesta en común se analizan las distintas soluciones de cada actividad y se hacen explícitas las habilidades matemáticas enseñadas en cada una de ellas.

---

#### **Conocimientos previos:**

- Sobre los números enteros: operaciones (suma, resta, multiplicación), la noción de dominio íntegro, la definición de divisibilidad, de número primo y compuesto, propiedad distributiva y de la potencia.
- Sobre lógica proposicional: la identificación de la hipótesis y tesis de una proposición, el uso de conectores lógicos, la validez de una proposición, el uso del contraejemplo si es falsa o de una argumentación (prueba) si es verdadera que abarque todos los casos.

### Objetivos de la propuesta:

- Las actividades permiten que el estudiante analice la estructura de una proposición matemática, reconociendo la hipótesis y la tesis y los conectores lógicos que se usan.
- Las actividades permiten que comprendan la definición de un concepto matemático (en este caso la noción de divisibilidad) para poder argumentar la validez de cada proposición enunciada.
- Las actividades permiten usar las proposiciones matemáticas verdaderas (propiedades) en otros ejercicios o preguntas de reflexión.
- Las actividades permiten reconocer que una proposición enunciada puede ser falsa pero que, si restringimos la hipótesis a un conjunto de valores, puede resultar verdadera.
- Las actividades permiten que los estudiantes a partir de la exploración numérica y la observación de regularidades conjeturen una propiedad matemática verdadera y realicen una prueba para justificar dicha afirmación.

#### Actividad 1

Sean  $a, b, c, d$  números enteros y  $d$  distinto de cero. Lee las siguientes afirmaciones y contesta todas las preguntas planteadas:

a)  $a|a$ .

b) Si  $d|a$  entonces  $-d|a$ .

c) Si  $d|a$  y  $d|b$  entonces  $d|a+b$ .

d) Si  $d|a \cdot b$  entonces  $d|a$ .

e) Si  $d|a$  entonces  $d^2|a^2$ .

f) Si  $d \leq a$  entonces  $d|a$ .

1) ¿Qué definición matemática atraviesa todas estas proposiciones matemáticas?

2) ¿Cuál es la estructura lógica que tiene cada una de estas proposiciones?

3) Escribe explícitamente para cada una de las proposiciones matemáticas, ¿Cuál es la hipótesis? ¿Cuál es la tesis? ¿Cuál es la estructura lógica proposicional que tienen cada una de ellas?

- 4) Explora cada una de las proposiciones con ejemplos. Toma para ello distintos tipos de enteros.
- 5) Sabiendo que en proposiciones matemáticas las hipótesis son siempre verdaderas, ya que hace referencia a datos conocidos, indica cuáles de las proposiciones enunciadas son falsas. ¿Cómo te diste cuenta del valor de verdad de la proposición?
- 6) Toma las proposiciones que indicaste que son falsas, ¿Cómo podés justificar que lo son? ¿Con eso alcanza?
- 7) Toma las proposiciones que indicaste que son verdaderas. Da una explicación en lenguaje coloquial de cómo podés argumentar que cada una de ellas es verdadera. Intenta dar una prueba formal que es verdadera, mostrando claramente donde usaste la hipótesis.
- 8) Para aquellas proposiciones escritas con un condicional, de la forma  $p \rightarrow q$ , enuncia su recíproco e indica el valor de verdad de cada una de ellas. Argumenta el porqué de tu afirmación.
- 9) Si tanto la proposición enunciada como la recíproca son verdaderas, escribe dicha propiedad resumida en un solo enunciado ¿Qué conector lógico se puede usar para unir ambas proposiciones?

## Actividad 2

- 1) Encuentra todos los enteros  $a$  distinto de 1 tales que  $a-1|a^2+5$ .
- a) Para ello indica claramente que propiedades matemáticas necesitas para resolver el problema.
- b) Justifica cada una de tus afirmaciones para llegar a la respuesta.
- 2) Sean  $a, b, c$  tres números enteros, donde  $c$  es distinto de cero, tales que  $a.c | b.c$  entonces  $a|b$ .

Explora si dicha afirmación es verdadera o falsa. Justifica tu afirmación, con una prueba matemática si es verdadera o con un contraejemplo si es falsa. ¿Es cierta la recíproca?

### Actividad 3.

Sea la siguiente afirmación matemática: Dados  $d$ ,  $a$ ,  $b$  enteros tales que  $d$  no es cero se tiene que:

$$\text{Si } d \mid a.b \text{ entonces } d \mid a \text{ o } d \mid b.$$

- 1) ¿Qué puedes decir del valor de verdad de dicha afirmación?
- 2) Si es verdadera da una prueba formal para justificar dicha elección.
- 3) Si es falsa, ¿es posible decir para qué valores de  $d$  se cumple la propiedad? ¿Existe una restricción en dicha propiedad para que resulte verdadera? Enuncia claramente la proposición matemática para que sea verdadera. Explica por qué podés afirmar que con esta restricción resulta verdadera. Dá una prueba formal para argumentar tu afirmación.
- 4) Busca en el libro *Algebra 1, de Teresa Krick* algún ejercicio que permita utilizar dicha propiedad. Resuelve el ejercicio y muestra dónde utilizas dicha propiedad.

### Actividad 4 (Extraído de las actividades propuestas de Mejora del Trabajo Final de Especialización de Susana de Toma)

A partir de la exploración con los números naturales, conjetura una propiedad matemática y analiza su valor de verdad. En el caso de ser verdadera da una prueba que lo justifique y si es falsa encuentra un contraejemplo, indicando explícitamente cuáles son las características que debe tener dicho ejemplo.

- a) Los números  $2^2-1=3$ ,  $2^3-1=7$ ,  $2^5-1=31$ , son todos primos, ¿qué ocurre si tomamos un primo natural  $p$  y hacemos la operación  $2^p-1$ ?

**b) ¿Qué ocurre con la operación  $2^n-1$ , si  $n$  es un número natural compuesto? ¿Es un número primo o compuesto?**

**Busca en Internet como se llaman los números primos de la forma  $2^n-1$ . ¿Cuál es el número de esta forma más grande que se conoce?**

### **Trabajo con dichas actividades**

#### **Actividad 1.**

Esta actividad tiene dos objetivos, por un lado, el análisis de una proposición matemática compuesta y sus partes (hipótesis, tesis, conectores lógicos) y el reconocimiento del valor de verdad y su posterior justificación (un contraejemplo si es falso o una prueba si es verdadero). Por otro, el uso de una definición matemática para reconocer aquellas proposiciones que son verdaderas y que toman el carácter de propiedades que se pueden usar para resolver otras actividades.

Lo primero que se les plantea en esta actividad es que puedan reconocer la definición matemática que se usa en todas las proposiciones escritas. Una pregunta posible por parte del docente es la siguiente: ¿qué significa el símbolo  $|$ ? Se puede escribir explícitamente el significado de este símbolo (definición de divisibilidad).

#### **Definición de divisibilidad:**

**Sean  $a$  y  $d$  enteros y  $d$  distinto de cero. Se dice que  $d$  divide a  $a$  ( $d|a$ ) si y solo si existe un entero  $q$  tal que  $a=d.q$**

Luego se les propone que indiquen cuál es la estructura lógica de todas las proposiciones. El docente puede preguntar ¿Notan una diferencia entre el ítem a) y los otros? ¿Cuál es la estructura de la proposición a)? ¿y el de las otras? En este caso todas las proposiciones tienen la estructura lógica  $A \rightarrow B$ , salvo el ítem a) cuya proposición se presenta simple y es de la forma  $p$ : “ $a|a$ ”.

A continuación, se les puede preguntar que indiquen cuál es la hipótesis y cuál es la tesis de cada una de las proposiciones enunciadas. Posibles preguntas para trabajar en esta parte:

- **¿Cuáles proposiciones tienen una hipótesis formada por una proposición simple? ¿Cuáles proposiciones tienen una hipótesis formada por una proposición compuesta?**
- **¿El ítem a) tiene una hipótesis y una tesis? ¿Se podría escribir la propiedad con un condicional?**
- **¿Las tesis de todas las proposiciones son simples o compuestas?**

Se puede observar que la proposición del ítem a) está escrita en formato de proposición simple **p**: “**a|a**”, a pesar de ello tiene una hipótesis y es que está enunciado para todos los enteros. Por lo tanto, una expresión equivalente es la siguiente: **Si a es entero entonces a | a**.

En esta parte del ejercicio puede surgir otra escritura equivalente: “**Todo número entero a verifica que a|a**”. Si surge esta otra manera equivalente de escribir la proposición **a | a** del ítem a) se puede proponer a los estudiantes que indiquen qué tiene que ocurrir con los números enteros para que la proposición sea verdadera o sea falsa.

**Problema propuesto:**

**1) Sea la siguiente proposición: Si a es entero, entonces a | a.**

**Sabiendo que la hipótesis en matemática siempre es verdadera porque es información reconocida y validada, ¿Cuál tiene que ser el valor de verdad de la tesis para que dicha proposición sea verdadera? Si en cambio la tesis es falsa, ¿Cuál es el valor de verdad de dicha proposición?**

**2) Sea la proposición: Todo número entero a verifica que a|a.**

**¿Cuándo dicha proposición es falsa? ¿Qué tiene que pasar para que el valor de verdad de la proposición sea verdadera?**

**3) ¿Por qué las proposiciones enunciadas en los ítems 1) y 2) son equivalentes?**

Todos los demás ítems están escritos en el formato  $A \rightarrow B$ , donde A es la hipótesis y B es la tesis. Las tesis de cada una de estas proposiciones son simples (no están unidos con ningún conector lógico); en cambio las hipótesis pueden ser simples o compuestas. Más

precisamente, las hipótesis de las proposiciones de los ítems b), d), e) y f) son simples y la hipótesis de la proposición del ítem c) es compuesta.

A modo de ejemplo extraemos algunas con todos estos casos enunciados anteriormente:

- Proposición de la forma  $p \rightarrow q$ , donde p es la proposición simple  $d|a$  y q es la proposición simple  $-d|a$  (ítem b).
- Proposición de la forma  $p \wedge q \rightarrow r$ , donde p es la proposición  $d|a$ , q la proposición  $d|b$  y r es la proposición  $d|a+b$  (ítem c).

A continuación, se les propone a los estudiantes explorar con ejemplos cada una de las distintas proposiciones matemáticas. Esta actividad tiene dos finalidades: que comprendan el enunciado matemático de cada proposición (a nivel del contenido matemático: divisibilidad) y que estudien su valor de verdad (a nivel de la lógica matemática). A partir de esta exploración se puede trabajar con los estudiantes los ítems 5), 6) y 7).

### **Propuesta de trabajo con cada una de las proposiciones matemáticas.**

- **Para el ítem a)** ¿Qué significa  $a|a$ ? Reescribe este enunciado de otra manera.

Los estudiantes volviendo a la definición matemática, tienen que poder decir que para que  $a|a$  tiene que existir q entero tal que  $a=a.q$ . ¿es posible encontrar el valor q entero? De ser posible, ¿quién es este valor de q? Se les puede proponer a los estudiantes que escriban los pasos de manera ordenada que son necesarios para demostrar la propiedad y luego que intenten demostrarla.

**Resolución:** *Es verdadera. En efecto,  $a|a$  pues  $a$  se puede escribir como  $a=a.1$  (en este caso  $q=1$ ).*

- **Para el ítem b)** ¿Qué ocurre con los ejemplos que encontraron? Los estudiantes pueden observar que en todos los ejemplos si d es un divisor de a entonces  $-d$  también es un divisor de a. ¿Estos ejemplos justifican que la afirmación es verdadera? ¿Podemos intuir que es verdadera o con los ejemplos lo demostramos? El docente puede motivar que una cantidad de ejemplos que verifica la proposición no indica que sea verdadera, porque quizás no damos con el ejemplo

que la contradiga. Podemos remitirnos al trabajo realizado en Introducción a la Matemática.

Sabiendo que la hipótesis es verdadera, ¿cuál debe ser el valor de verdad de la tesis para que la proposición sea verdadera? Escribe la hipótesis usando la definición de divisibilidad.

Los estudiantes, usando la definición de divisibilidad, pueden deducir que el dato es que el entero  $a$  se puede escribir de la forma  $a=d.q$  para algún  $q$  entero.

¿Cómo podemos reescribir la tesis usando la definición de divisibilidad? ¿Qué queremos probar cuando decimos que la tesis debe ser verdadera?

Los estudiantes, usando la definición de divisibilidad, pueden escribir que lo que se quiere mostrar que es verdadero es que  $a=(-d).k$ , donde  $k$  es entero. En este punto el docente tiene que mostrar que si queremos ver que la proposición es verdadera tenemos que, partiendo de que cualquier entero  $a$  que se escribe como  $a=d.q$  para algún  $q$ , queremos ver que  $a$  también se escribe como  $a=(-d).k$ , con  $k$  entero. Dicho de otro modo, sabiendo que  $d$  es divisor de  $a$  queremos ver que  $-d$  también es divisor de  $a$ .

Se puede discutir también que el valor de  $q$  es conocido (porque corresponde a la hipótesis), pero el valor de  $k$  es lo queremos encontrar (y en principio es distinto de  $q$ ). Si existe este valor de  $k$  entonces la tesis es verdadera; y por lo tanto la proposición del ítem b) es verdadera. Si no existe  $k$  entonces la proposición es falsa. Se les puede proponer, de la misma manera que el ítem anterior, que los estudiantes escriban los pasos de manera ordenada que son necesarios para demostrar la propiedad y luego intenten demostrarla.

**Resolución:** Es verdadera. Como sabemos que  $a=d.q$  entonces  $a=(-d).(-q)$ , por la regla de los signos; por lo tanto el valor de  $k:=-q$ . Concluimos que  $-d$  también es divisor de  $a$ .

- **Para el ítem c).** Se puede trabajar de la misma manera que el ítem anterior. Esta proposición es verdadera, solo que la hipótesis tiene dos datos: dados dos enteros  $a$  y  $b$ , se sabe que  $a=d.q$ , con  $q$  entero y  $b=d.k$ , con  $k$  entero. ¿Qué queremos

demostrar para garantizar que la proposición es verdadera? Queremos ver que, si  $d$  es un divisor de  $a$  y  $b$ , entonces  $d$  es un divisor de la suma de dichos números.

Una pregunta que se les puede hacer a los estudiantes es: ¿qué quiere decir la propiedad? Escríbelo en lenguaje coloquial. Al igual que los ítems anteriores se les puede pedir a los estudiantes que escriban los pasos de manera ordenada que son necesarios para demostrar la propiedad y luego que intenten demostrarla.

**Resolución:** *Es verdadera. Como  $a=d.q$  y  $b=d.k$  ( $d$  es divisor de  $a$  y  $b$ ), entonces  $a+b=dq+dk=d(q+k)$  (Propiedad distributiva).*

*Entonces  $d$  es un divisor de  $a+b$  pues  $q+k$  es el entero tal que  $a+b=d.(q+k)$ .*

- **Para el ítem d).** Esta es una proposición falsa. ¿Cómo puedes asegurar que la proposición es falsa? ¿Qué tiene que cumplir el ejemplo elegido para garantizar que la proposición es falsa? ¿existe más de un ejemplo que muestra que la proposición es falsa? ¿Basta con un ejemplo que muestre que es falsa o necesitamos más de uno? Podemos retomar el trabajo realizado en Introducción a la Matemática.

**Resolución:** *La proposición es falsa porque 2 divide a 3.4 pero 2 no divide a 3.*

- **Para el ítem e)** Es una proposición verdadera. Para demostrar que es verdadera los estudiantes tienen que apelar a la definición de divisibilidad y a propiedades de la potencia. Posibles preguntas del docente ante esta actividad: ¿cuál es la hipótesis? ¿Qué significa  $d|a$ ? ¿Cómo demostrar a partir de esta información que  $d^2$  es un divisor de  $a^2$ ? ¿Necesitas para demostrarlo alguna propiedad matemática además de la hipótesis? Al igual que antes se les puede pedir a los estudiantes que escriban los pasos de manera ordenada que son necesarios para demostrar la propiedad y luego que intenten demostrarla.

**Resolución:** *Es verdadera. Como  $d|a$  entonces  $a=d.q$  para algún  $q$  entero. Si lo elevamos al cuadrado y usamos una propiedad de la potencia tenemos que  $a^2=(dq)^2=d^2 q^2$ . Esto muestra que  $d^2$  es un divisor de  $a^2$ .*

- **Para el ítem f).** La proposición es falsa. Los estudiantes pueden encontrar contraejemplos que lo demuestren. Por ejemplo,  $2 \leq 3$  pero 2 no divide a 3.

Un trabajo alternativo con la demostración en matemática de proposiciones que son verdaderas, puede ser el siguiente.

**La proposición c) Si  $d|a$  y  $d|b$  entonces  $d|a+b$  es verdadera**

**¿Cómo realizar detalladamente la demostración?**

**A continuación, se encuentran todos los pasos necesarios para demostrarla, pero están desordenados. Ordena todos esos pasos y únelos usando conectores lógicos y/o palabras en lenguaje coloquial que permita mostrar la cadena deductiva para llegar a la demostración.**

**i)  $a+b=dk$ , con  $k$  entero.**

**ii)  $a=dq$ , con  $q$  entero.**

**iii)  $a+b=d(q+l)$ .**

**iv)  $b=dl$ , con  $l$  entero.**

**v)  $d|a$  y  $d|b$ .**

**vi)  $a+b=(dq)+(dl)$ .**

**vii)  $k=q+l$ .**

**Lee nuevamente la demostración que escribiste para argumentar la validez de la prueba matemática y justifica cada paso.**

Luego de trabajar el valor de verdad de cada proposición matemática, se les pide a los estudiantes que tomen las proposiciones de los ítems b) a f) y que escriban el recíproco de cada uno. El docente puede preguntarles que expliquen en lenguaje coloquial (verbal o escrito, pero de manera hablada) cómo se puede enunciar el recíproco de cada propiedad y qué significa. Luego, se les pide que analicen el valor de verdad de cada uno de los recíprocos enunciados, argumentando si es verdadera con una prueba matemática y si es falsa dando un contraejemplo. El trabajo con cada uno de los recíprocos se puede hacer de la misma manera que lo expuesto anteriormente. A modo de ejemplo, enunciamos los recíprocos de cada una de las proposiciones, su valor de verdad y el modo de trabajo con tres de ellas.

- Recíproco de b) Si  $\neg d|a$  entonces  $d|a$ . Esta es una proposición verdadera.
- Recíproco de c) Si  $d|a+b$  entonces  $d|a$  y  $d|b$ . Esta es una proposición falsa.
- Recíproco de d) Si  $d|a$  entonces  $d|a.b$ . Esta es una proposición verdadera.

- Recíproco de e) Si  $d^2|a^2$  entonces  $d|a$ . Esta es una proposición verdadera cuya justificación la retomamos cuando trabajemos el Teorema Fundamental de la Aritmética.
- Recíproco de f) Si  $d|a$  entonces  $d \leq a$ . Esta es una propiedad falsa.

**Problemas alternativos para trabajar con el recíproco del ítem c) y f)**

**El recíproco de la proposición c) es falsa. Su enunciado dice: Si  $d|a+b$  entonces  $d|a$  y  $d|b$ .**

**A continuación, se encuentra una demostración matemática que afirma la supuesta verdad de la proposición, ¿dónde está el error?**

**Demostración.** Como  $d|a+b$  y  $d|a$  entonces  $a+b=d \cdot q$  con  $q$  entero (I) y  $a=d \cdot l$  con  $l$  entero (II). Por lo tanto, de (I) tenemos que  $b=d \cdot q - a$ . Así reemplazando (II) en el anterior, tenemos que  $b=d \cdot q - d \cdot l = d \cdot (q-l)$ , donde  $q-l$  es entero. Por lo tanto, probamos que  $d|b$ , como queríamos demostrar.

**El recíproco de la proposición f) es falsa. Su enunciado es el siguiente: sean  $d, a$  enteros con  $d$  no nulo. Si  $d|a$  entonces  $d \leq a$  es falsa. A continuación, se presenta una demostración que muestra su aparente valor de verdad, ¿dónde está el error?**

**Demostración.** Como  $d|a$ , entonces  $a=d \cdot q$  con  $q$  entero. Por lo tanto,  $a=d \cdot q \geq d$ , (no es mayor estricto pues  $q$  puede ser igual a 1). Así probamos que  $d \leq a$ .

Observemos que el recíproco del ítem b) es también verdadero. Los estudiantes pueden conjeturar dicho valor de verdad a partir de ejemplos y proponer una prueba matemática siguiendo los pasos usados para probar que el ítem b) es verdadero. Algunas posibles preguntas para orientar este trabajo pueden ser: ¿Cuál es la hipótesis? ¿Cuál es la tesis? Si es verdadera, ¿cómo puedo argumentar dicha afirmación?

**Resolución:** Como  $-d|a$  entonces  $a=(-d).q$  con  $q$  entero. Por lo tanto,  $a=d.(-q)$ , así  $d$  es un divisor de  $a$ , por lo que  $d|a$ .

En cambio, el recíproco de c) es falso. Para ello, los estudiantes pueden dar un contraejemplo: tenemos que  $2|3+5$  pero 2 no divide ni a 3 ni a 5.

El recíproco de f) es falso, pues por ejemplo  $3|-6$  pues  $-6=3.(-2)$  pero  $3>-6$ .

Para cerrar la actividad 1, podemos retomar las proposiciones matemáticas que son verdaderas y cuyos recíprocos también lo son. El docente puede invitar a los estudiantes a escribir dichas proposiciones en una sola propiedad unida por un conector lógico. Algunas posibilidades son las siguientes:  $A\leftrightarrow B$  o también  $A\rightarrow B \wedge B\rightarrow A$ .

## Actividad 2

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes apliquen algunas de las proposiciones verdaderas de la Actividad 1, y que ya fueron demostradas. Estas proposiciones adquieren el carácter de propiedades matemáticas, que son validadas por una comunidad y que se pueden usar como hipótesis implícitas en nuevas proposiciones a demostrar que son verdaderas.

Para el ítem 1) de dicha actividad se les pide a los estudiantes que intenten usar propiedades de divisibilidad para encontrar todos los enteros  $a$  distintos de 1 tales que  $a-1$  es divisor de  $a^2+5$ .

Una primera pregunta que se puede hacer es ¿por qué el enunciado restringe a los enteros distinto de 1? ¿Qué pasa si  $a=1$ ? En ese caso queda que  $0|5$ . ¿Es posible que 0 sea un divisor de 5? Si eso ocurre  $5=0.q$ , con  $q$  entero. Esto es imposible en el conjunto de los números enteros ya que quedaría que  $5=0$ .

Si los estudiantes se traban y no pueden encontrar una propiedad que permita resolver el ejercicio, se les puede proponer el siguiente problema:

### Problema propuesto

1) ¿Por qué es cierto que  $a-1|a-1$ ? ¿Qué propiedad de la Actividad 1 usamos para garantizar dicha proposición?

- 2) ¿Por qué es cierto que  $a-1 \mid (a-1).(a+1)$ ? ¿Qué propiedad de la Actividad 1 usamos para garantizar que es cierto?
- 3) A partir del ítem 2) y usando que  $a-1 \mid a^2+5$ , ¿cómo podemos llegar a que entonces  $a-1 \mid 6$ ?
- 4) ¿A partir de la conclusión de 3) encontrará todos los  $a$  enteros distinto de 1 tales que  $a-1 \mid a^2+5$ ?

**Resolución:** Como  $a-1 \mid a-1$  (usando la propiedad a) de la Actividad 1), tenemos que  $a-1 \mid (a-1).(a+1)$  (acá estamos usando el recíproco de la proposición d) de la Actividad 1, que dice si  $d \mid a$  entonces  $d \mid a.b$ . Aquí  $b:=a+1$ ). Así tenemos que  $a-1 \mid a^2-1$ . En esto último usamos que  $(a-1).(a+1)=a^2-1$ .

Como  $a-1 \mid a^2+5$  (hipótesis del enunciado) y  $a-1 \mid a^2-1$  (hipótesis nueva) tenemos que

$$a-1 \mid (a^2+5)-(a^2-1),$$

esto sale de la propiedad c) de la Actividad 1: Si  $d \mid a$  y  $d \mid b$  entonces  $d \mid a+b$ .

Por lo tanto, tenemos que  $a-1 \mid 6$ . Como los divisores de 6 son 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, tenemos que los posibles valores de  $a$  son -5, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 7.

El ítem 2) es un ejercicio que sale usando propiedades de la Actividad 1, como también una propiedad de los números enteros ya vista, que es:

$$a.b=0 \text{ entonces } a=0 \text{ o } b=0 \text{ (1)}$$

Se los invita a los estudiantes a determinar cuál es la hipótesis y cuál es la tesis, a explorar con ejemplos dicha propiedad y a conjeturar si es verdadera o falsa. Luego se les pide un contraejemplo si es falsa, o una prueba si es verdadera. Se puede invitar a un grupo de estudiantes o a un estudiante que cuente cómo llegó a que era verdadera y cómo lo justificó, y luego entre todos analizar dicha demostración.

**Resolución.** Como  $a.c \mid b.c$  entonces  $b.c = a.c.q$  para algún  $q$  entero.

Esto equivale a que  $b.c-a.c.q=0$ , por la propiedad distributiva tenemos que

$$c.(b-a-q)=0.$$

*Como vale la propiedad (1) se tiene que  $c=0$  o  $b-a.q=0$ . Como  $c$  es distinto de cero, entonces  $b=a.q$ , mostrando que  $a$  es un divisor de  $b$ .*

Una pregunta que se puede hacer al cierre de este ítem, es ¿qué pasa si no tenemos la hipótesis de que  $c$  es distinto de cero?

Otra pregunta que puede hacer el docente es la siguiente: ¿Cuál es el recíproco de dicha propiedad matemática? ¿cuál es el valor de verdad de dicha propiedad?

$$\text{Si } a|b \text{ entonces } a.c | b.c$$

Los estudiantes pueden mostrar que esta propiedad también es verdadera y para la demostración usar la definición de divisibilidad. Si ambas propiedades son verdaderas, ¿cómo se puede reescribir dichas proposiciones en una sola propiedad?

### **Actividad 3**

Esta actividad avanza en el trabajo de exploración en matemática para encontrar una propiedad. Se enuncia una proposición falsa, pero no se pide que den un contraejemplo que argumente dicho valor de verdad, sino que a través de la observación de ejemplos se pide que den una restricción a la hipótesis para que sea verdadera. Dicho de otra manera, la actividad requiere que encuentren el conjunto de valores donde dicha proposición es verdadera. Como queremos que se convierta en una propiedad matemática utilizable en nuevos problemas este conjunto de valores debe ser una familia de números enteros (subconjunto de infinitos números enteros).

Un ejemplo que muestra que es falsa la proposición matemática es el siguiente: 6 es divisor de 2.3 pero 6 no divide ni a 2 ni a 3. Si todos los ejemplos de los estudiantes son números compuestos (números que tienen más divisores que 1, -1, el número y el opuesto aditivo de él), el docente puede invitarlos a que propongan ejemplos con números primos (los únicos divisores son 1, -1, el número y su opuesto aditivo).

Algunos ejemplos que se pueden analizar en clase:

- 6 no lo cumple pues 6 es divisor de 2.3 pero 6 no divide ni a 2 ni a 3 (6 es compuesto)
- 9 no lo cumple pues 9 es divisor de 3.3 pero 9 no es divisor de 3 (9 es compuesto)

- 2 lo cumple pues 2 es divisor de 2.1 y se tiene que 2 es divisor de 7 (2 es primo)  
2 es divisor de 4.8 y se tiene que 2 es divisor de 4 y de 8.
- 7 lo cumple pues 7 es divisor de 7.1 y se tiene que 7 es divisor de 7 (7 es primo)  
7 es divisor de 49.3 y se tiene que 7 es divisor de 3

Una posibilidad es que los estudiantes no sepan cuando es verdadera o falsa dicha proposición matemática ya que la tesis está en formato  $p \vee q$ ; en ese caso podemos proponer el siguiente problema previo:

### **Problema propuesto**

- 1) Sea la proposición  $r \rightarrow p \vee q$ . Si  $r$  es verdadera y queremos que la proposición  $r \rightarrow p \vee q$  sea verdadera, ¿cuál tiene que ser el valor de verdad de  $p \vee q$ ? Si alguna de las dos proposiciones simples de  $p \vee q$  es verdadera, ¿podemos afirmar que  $p \vee q$  es verdadera?
- 2) Sea la proposición  $r \rightarrow p \vee q$ . Si  $r$  es verdadera y queremos que  $r \rightarrow p \vee q$  sea falsa, ¿cuál tiene que ser el valor de verdad de  $p \vee q$ ? Si alguna de las proposiciones simples de  $p \vee q$  son falsas, ¿podemos afirmar que  $p \vee q$  es falsa?
- 3) Usa las conclusiones de los ítems 1) y 2) para determinar el valor de verdad de la proposición: Si  $d \mid a \cdot b$  entonces  $d \mid a$  o  $d \mid b$ , en cada uno de los ejemplos.

Luego de los ejemplos planteados se les puede preguntar a los estudiantes, ¿Para qué ejemplos resultó la proposición enunciada verdadera? ¿Qué característica común tiene todos los ejemplos donde resultó la proposición enunciada verdadera? La respuesta es que todos los números que convirtieron a la proposición en verdadera son números primos. O, dicho de otro modo, la proposición es verdadera cuando los números  $d$  elegidos son primos. Luego, el docente puede preguntar, ¿Cómo se puede enunciar la proposición matemática con dicha restricción?

**Proposición enunciada con la restricción:**

**Si  $p$  es primo tal que  $p \mid a \cdot b$  entonces  $p \mid a$  o  $p \mid b$ .**

La demostración de dicha propiedad se puede realizar entre todos. El docente puede guiar con pequeñas actividades esta tarea.

Se puede recordar también que es válido usar la siguiente propiedad (trabajada en clases anteriores):

**Si  $p|a.b$  y  $(p:a)=1$  entonces  $p|b$ ,**

**donde  $(a:b)$  indica el máximo común divisor entre  $a$  y  $b$ .**

**Problema propuesto para guiar la actividad de demostración de dicha proposición:**

**1) Supongamos que tenemos un número entero cualquiera  $a$  y un primo  $p$ .**

**i) Si  $p$  es divisor de  $a$ , ¿Cuánto vale el máximo común divisor entre  $a$  y  $p$ , es decir  $(a:p)$ ?**

**ii) Si  $p$  no es divisor de  $a$ , ¿Cuánto vale el máximo común divisor entre  $a$  y  $p$ , es decir  $(a:p)$ ?**

**iii) Escribe una conclusión como una propiedad matemática.**

**2) Supongamos que  $p$  es primo y que  $p|a.b$ , ¿qué tiene que ocurrir para que la tesis sea verdadera? Para que el valor de verdad de la proposición “ $p|a$  o  $p|b$ ” sea verdadera, ¿cuál tiene que ser el valor de verdad de las proposiciones simples?**

**3) Como  $p$  es primo y  $a$  es entero, tenemos dos posibilidades que  $p|a$  o que  $p$  no sea divisor de  $a$ . Si  $p|a$ , entonces ¿cuál es el valor de verdad de la tesis?**

**4) Si en cambio  $p$  no es divisor de  $a$ , entonces ¿qué tenemos que demostrar para que la tesis sea verdadera?**

**5) Usando todo lo trabajado, realiza una prueba matemática para demostrar que la proposición es verdadera.**

***Resolución:** Si  $p|a$ , entonces la proposición queda demostrada. En cambio si  $p$  no es divisor de  $a$ , entonces  $(a:p)=1$ . Como  $p|a.b$  y  $(a:p)=1$ , entonces  $p|b$ . Esta última observación ya se trabajó en clases previas a esta secuencia didáctica.*

Por último, se los invita a realizar una prueba matemática de la siguiente proposición verdadera:

Si  $d^2|a^2$  entonces  $d|a$  (Actividad 1, recíproco de e)).

También se los puede invitar a buscar en el libro de consulta de la materia algún ejercicio que se resuelve con esta propiedad.

#### **Actividad 4**

El objetivo de esta actividad es que a partir de la exploración matemática con ejemplos, los estudiantes encuentren un patrón de regularidad numérica, y a partir de él puedan conjeturar una proposición matemática. Luego de la proposición enunciada los estudiantes pueden argumentar sobre el valor de verdad de la misma. Esta actividad ya fue propuesta en Introducción a la Matemática, pero avanza en la formulación de la proposición para que resulte verdadera. Los estudiantes tienen que explorar no solo con números primos sino también con números compuestos.

Algunas preguntas que pueden orientar dicho trabajo son:

- Da numerosos ejemplos, observando si existe alguna regularidad.
- ¿Qué regularidad numérica encuentras? ¿Qué tipos de números primos  $p$  elegiste? ¿Qué tipo de número es  $2^p-1$  para esos ejemplos? ¿Cuál es la observación?
- ¿Cuál puede ser la propiedad que incluya la hipótesis (información presentada) y la regularidad encontrada? ¿Cuál es la hipótesis y cuál es la tesis de dicha propiedad?
- ¿Cómo puedes argumentar que es verdadera o es falsa? ¿Cómo puedes justificar dicha afirmación? Justificala

Mirando los ejemplos propuestos los estudiantes pueden observar que si hacen la operación  $2^p-1$  con  $p$  primo natural entonces se obtiene un número primo. Otro trabajo que pueden hacer es con ejemplos con algún programa computacional como GeoGebra o con la calculadora.

Si usan la Vista Cas de GeoGebra pueden observar que

$n := 3$	$n := 5$	$n := 7$
$\rightarrow n := 3$	$\rightarrow n := 5$	$\rightarrow n := 7$
$a := 2^n - 1$	$a := 2^n - 1$	$a := 2^n - 1$
$\rightarrow a := 7$	$\rightarrow a := 31$	$\rightarrow a := 127$
Factores(a)	Factores(a)	Factores(a)
$\rightarrow ( 7 \ 1 )$	$\rightarrow ( 31 \ 1 )$	$\rightarrow ( 127 \ 1 )$

El comando Factores (a) de GeoGebra Vista Cas indica una matriz que muestra en la primera columna el número primo y en la segunda columna el exponente correspondiente. Por ejemplo, para  $a:=7$ , la matriz  $(7 \ 1)$  indica que a se factoriza como  $a=7^1$ . De aquí se deduce que a es primo porque los únicos divisores posibles son 7 y 1.

En todos estos ejemplos observamos que el resultado de hacer  $2^n-1$  resulta ser primo ya que los únicos divisores positivos que tiene el número n (primo natural) en este caso es 1 y n.

Una conjetura que pueden encontrar los estudiantes es:

*Si n es primo natural entonces  $2^n-1$  también es primo.*

Si los estudiantes no saben cómo decidir si la proposición es verdadera o falsa, se les puede proponer que encuentren otros ejemplos. ¿Se te ocurre otros primos naturales? ¿Qué ocurre con  $2^n-1$  para estos primos? En este punto pueden buscar otros primos y observar que ocurre con la expresión  $2^n-1$ . Si  $n=11$  entonces  $2^{11}-1=2047$  no es primo pues los divisores primos positivos son 23, 89. Otro ejemplo es  $n=23$ , ya que  $2^{23}-1=8.388.607$ , que tiene como divisores primos positivos 47, 178.481.

Una segunda actividad que el docente puede proponer es, ¿el número  $2^n-1$  es primo o compuesto cuando tomamos diferentes n números compuestos naturales?

$n := 4$	$n := 6$	$n := 8$
$\rightarrow n := 4$	$\rightarrow n := 6$	$\rightarrow n := 8$
$a := 2^n - 1$	$a := 2^n - 1$	$a := 2^n - 1$
$\rightarrow a := 15$	$\rightarrow a := 63$	$\rightarrow a := 255$
Factores(a)	Factores(a)	Factores(a)
$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$	$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \\ 17 & 1 \end{pmatrix}$

En todos los ejemplos se puede ver que si  $n$  es compuesto la operación  $2^n - 1$  también es compuesto.

**Proposición enunciada:**

**Si  $n$  es un número natural compuesto entonces  $2^n - 1$  es compuesto.**

Para realizar la demostración de la proposición, el docente puede recordar la siguiente propiedad (vista en Introducción a la Matemática o en el Taller Inicial de Matemática):

$$c^n - d^n = (c-d) \cdot (c^{n-1} + c^{n-2} \cdot d + \dots + c \cdot d^{n-2} + d^{n-1}) \quad (*)$$

y guiar el trabajo con el siguiente problema:

**Problema propuesto**

**1) Sabemos que la hipótesis es verdadera y es una información que se puede usar para demostrar que la tesis es verdadera. ¿Qué significa que  $n$  es un número compuesto?**

**2) Usando la propiedad (\*). ¿Cómo puedo demostrar que  $2^n - 1$  es compuesto?**

**Resolución:** Como  $n$  es compuesto, entonces  $n = a \cdot b$  con  $a, b$  naturales y por lo tanto mayores a 1. Así, tenemos que

$$2^n - 1 = ((2^a)^b - 1^b) = (2^a - 1) \cdot (1 + 2^a + 2^{2a} + \dots + 2^{(b-1)a})$$

Como  $a$  y  $b$  son naturales, podemos decir que  $2^a - 1$  es natural y  $1 + 2^a + 2^{2a} + \dots + 2^{(b-1)a}$  es natural. Por lo tanto,  $2^n - 1$  es compuesto, pues el producto de dos números naturales.

Luego se los invita a buscar cómo se llaman los números primos escritos de la forma  $2^n - 1$ .

***Observación:*** Los primos de la forma  $2^n - 1$  con  $n$  natural primo se llaman números de Mersenne, por Marin Mersenne, monje y filósofo francés, 1588-1648. Se conjetura que existen infinitos primos de Mersenne pero aún no se sabe. Hasta enero de 2019 se conocen 51 primos de Mersenne y el más grande conocido hasta la fecha es el número de Mersenne primo  $2^{82.589.933} - 1$ , con 24.862.048 dígitos. Para demostrar que este un número es primo se utiliza programas computacionales.

## 5.2 Secuencia didáctica Parte 2

Estas actividades proponen la comprensión tanto de un teorema como su demostración. Incluye una guía secuenciada de preguntas para hacer explícito al estudiante donde tiene que poner la mirada y reflexionar, para así poder comprender tanto el enunciado del teorema como su demostración. Esta guía está inspirada en el trabajo de D'andrea (2010). En esta guía secuenciada también se incluyen ejercicios que permiten el análisis de cada parte del enunciado del teorema o de parte de la demostración que lo valida. También se propone la lectura de una demostración constructiva, cuyos pasos incluyen la técnica de cuándo y cómo una ecuación lineal en dos variables tiene soluciones enteras.

### Conocimientos previos:

- **Sobre los números enteros:** divisibilidad, números primos y compuestos, propiedades de la divisibilidad, máximo común divisor.
- **Sobre lógica:** proposiciones matemáticas y conectores lógicos, análisis del valor de verdad de una proposición compuesta y las formas de argumentar si una proposición es verdadera o falsa: algunas técnicas de demostración.

### Objetivos de la propuesta:

- Las actividades permiten comprender el significado de un teorema y sus partes.
- Las actividades permiten hacer explícitas algunas de las preguntas necesarias para entender una demostración matemática que comprende varias partes e incluyen algunas de las técnicas más comunes para demostrar un teorema.

- Las actividades permiten la aplicación tanto de un teorema o de una demostración para resolver problemas matemáticos.

### Actividad 7

Lee el siguiente teorema extraído del libro: **Los números. De los Naturales a los complejos**, de Dr. Matías Graña y otros, páginas 60 a 62, que corresponde al **Teorema 2.6: Teorema Fundamental de la Aritmética**.

**TEOREMA 2.6** (Teorema Fundamental de la Aritmética). *Todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0, 1, -1$ , se factoriza como producto de primos. Explícitamente, todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 1$ , se escribe como producto de primos positivos,*

$$\begin{aligned} n &= \prod_{i=1}^r p_i \\ &= p_1 \cdot p_2 \cdots p_r \end{aligned}$$

*y esta factorización es única, salvo por el orden de los factores.*

*Todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n < -1$ , se escribe como  $-1$  por un producto de primos positivos,*

$$\begin{aligned} n &= (-1) \cdot \prod_{i=1}^r p_i \\ &= (-1) \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_r \end{aligned}$$

*y esta factorización es única, salvo por el orden de los factores.*

**DEMOSTRACIÓN.** Probemos primero el enunciado para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 1$ . Consideremos el conjunto:

$$\mathcal{P} = \{n \in \mathbb{N} : n \neq 1 \text{ y } n \text{ no admite factorización en primos positivos}\}$$

Dado que  $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ , si fuera no vacío,  $\mathcal{P}$  tendría un primer elemento, digamos  $n_0$ . En particular,  $n_0$  no sería primo (pues si lo fuera,  $n_0$  sería igual a una factorización en primos de un único factor, el mismo  $n_0$ ), entonces existirían  $d, q \in \mathbb{N}$ , distintos de 1 y de  $n_0$ , tales que  $n_0 = d \cdot q$ ; más aún,  $d$  y  $q$  deberían ser menores que  $n_0$  por ser divisores de  $n_0$ . Por lo tanto, ni  $d$  ni  $q$  pertenecerían a  $\mathcal{P}$ , y entonces serían factorizables en primos, en cuyo caso el mismo  $n_0$  se factorizaría también, lo cual sería una contradicción. Por lo tanto,  $\mathcal{P}$  es vacío, es decir, *todo natural salvo el 1 se factoriza como un producto de primos positivos*.

Si  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n < -1$ , entonces  $-n$  es positivo, distinto de 1 y se factoriza como un producto de primos positivos, digamos:

$$\begin{aligned} -n &= \prod_{i=1}^r p_i \\ &= p_1 \cdot p_2 \cdots p_r \end{aligned}$$

que implica:

$$\begin{aligned} n &= -\prod_{i=1}^r p_i \\ &= (-1) \cdot \prod_{i=1}^r p_i \\ &= (-1) \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_r \end{aligned}$$

Por lo tanto, *todo entero negativo distinto de -1 se escribe como -1 por un producto de primos positivos.*

Veamos que la factorización es única, salvo por el orden de los factores. Para esto basta considerar el caso de números naturales. La prueba procede por inducción en  $r$ , la cantidad de factores primos en una descomposición.

Definamos la proposición  $P(r)$ : *Si un número natural admite una factorización como producto de  $r$  factores primos positivos, esta factorización es única, salvo por el orden de los factores.*

Si  $r = 1$ , el número en cuestión es producto de un único factor, es decir, es un primo  $p$  y, por lo tanto, no tiene divisores distintos de 1 y  $p$ . Entonces, si  $p$  admite una factorización  $p = p_1 \cdots p_s$  como producto de primos positivos, debe ser  $s = 1$  y  $p_1 = p$  (de lo contrario,  $p_1$  sería un divisor de  $p$  y  $p_1 \neq 1, p$ ).

Probemos el paso inductivo. Sea  $n$  un natural que admite una factorización como producto de  $r + 1$  factores primos y veamos que esta factorización es única.

Supongamos que:

$$\begin{aligned} n &= \prod_{i=1}^{r+1} p_i \\ &= p_1 \cdot p_2 \cdots p_r \cdot p_{r+1} \end{aligned}$$

y también, para algún  $r' \in \mathbb{N}$ :

$$n = \prod_{j=1}^{r'} p'_j$$

$$= p'_1 \cdot p'_2 \cdots p'_{r'}$$

Todos los primos que aparecen en la factorización de  $n$ , dividen a  $n$ . Por ejemplo: el primo  $p_{r+1}$  divide a  $n$ , o sea que, en particular, divide al producto de primos que forman la segunda descomposición; por lo tanto, divide a alguno de los factores; pero como ellos son todos primos positivos, necesariamente coincide con alguno de estos factores, es decir que:

$$p_{r+1} = p'_{j_0} \text{ para algún subíndice } j_0$$

Luego, si excluimos este factor, obtenemos un número natural que admite una factorización con exactamente  $r$  factores primos:

$$\prod_{i=1}^r p_i = \prod_{j=1, j \neq j_0}^{r'} p'_j \quad (*)$$

Por lo tanto, como consecuencia de la hipótesis inductiva, la descomposición de este número es única, salvo el orden de los factores; pero entonces lo mismo vale para  $n$ , dado que el factor que les falta a ambas descomposiciones (\*) es  $p_{r+1}$  que es igual a  $p'_{j_0}$ .

### Sobre enunciado:

- 1) Si tenemos un número entero  $n$  distinto de 0, 1 o -1, ¿qué afirma el teorema?
- 2) ¿Puede ocurrir que exista dos factorizaciones distintas de un mismo número como producto de primos?
- 3) ¿Puede ocurrir que un entero distinto de 0, 1 o -1 no admita una factorización como producto de primos?
- 4) ¿Cuál es la factorización de un número primo?
- 5) Verifica la propiedad con algunos ejemplos.

### Sobre la demostración del teorema:

- 1) ¿Qué queremos demostrar? ¿Cuál es la hipótesis que permite demostrar dicha propiedad? ¿Hay alguna hipótesis implícita que ayuda a probar esta propiedad? Por hipótesis implícita nos referimos a aquella información que se puede usar porque corresponde a propiedades anteriores validadas por una comunidad.

- 2) Para realizar la demostración necesitamos probar dos partes, ¿cuáles son dichas partes?
- 3) ¿Qué se demuestra primero? ¿Lo que se demuestra corresponde a qué parte de la tesis?
- 4) La demostración comienza definiendo un conjunto  $P$  particular de números naturales, ¿Qué pasa si  $P$  es vacío? ¿Por qué supone que  $P$  es no vacío?
- 5) ¿Por qué si  $P$  es no vacío tiene un primer elemento, que llama  $n_0$ ?
- 6) ¿Por qué  $n_0$  no puede ser primo?
- 7) ¿Por qué escribe a  $n_0=d.q$ ? ¿Por qué  $d$  y  $q$  no son elementos de  $P$ ?
- 8) ¿Cómo llega a una contradicción? ¿Qué significa dicha contradicción?
- 9) ¿Por qué basta probar que cualquier entero se factoriza como producto de primos, si dicho entero es natural? ¿Qué pasa si el número es negativo?
- 10) La demostración continúa probando que la factorización es única, salvo el orden de los factores. ¿Con qué método matemático demuestra dicha afirmación?
- 11) Revisa en la unidad anterior el Principio de Inducción Completa y muestra claramente cuál es la hipótesis inductiva en este caso. ¿Se cumple para el caso  $r=1$ ? ¿Qué significa que se cumpla?
- 12) ¿Cómo continua la demostración? ¿Quién es el paso inductivo? Justifica cada uno de los pasos.
- 13) ¿Qué propiedad conocida de los números primos se usa en la siguiente frase: “el primo  $p_{r+1}$  divide a  $n$ , o sea que, en particular, divide al producto de primos que forman la segunda descomposición; por lo tanto, divide a alguno de los factores”?

#### Actividad 8:

- 1) ¿Cómo se puede aplicar el resultado del teorema anterior para probar cada una de las siguientes frases?
  - a) Todo número natural compuesto  $n$  es divisible por algún primo estrictamente menor que  $n$ .

b) Si  $a$  y  $b$  son dos números enteros entonces  $a \cdot b$  tiene exactamente los mismos primos que  $a$  y  $b$  en su factorización.

c) Sean  $p$  primo y  $a$  entero.  $p|a$  si y solo si  $p$  aparece en la factorización de  $a$ .

2) Decidí si existen enteros  $a$  y  $b$  no nulos que satisfagan que  $a^2=8b^2$ .

### Actividad 9

Sean  $a$ ,  $b$ ,  $c$  tres números enteros, con  $a$  y  $b$  no ceros y consideramos la ecuación lineal:

$$ax+by=c \quad (*)$$

1) Explora con determinados valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  y determina si existen  $x$ ,  $y$  enteros tales que verifican la ecuación (\*), es decir es solución de la ecuación lineal.

2) A partir de los ejemplos, contesta la siguiente pregunta: ¿Cuándo este tipo de ecuaciones lineales no tiene solución entera?

3) Lee la proposición 5.1.2 (Ecuación diofántica y máximo común divisor) del *Libro Algebra I de Teresa Krick, página 172* y analiza si podemos contestar la pregunta del ítem 2). ¿Se puede aplicar esta propiedad si buscamos la solución real no entera de dicha ecuación? Escribe como una proposición la respuesta a la pregunta del ítem 2).

4) Mirando la demostración de la Proposición 5.1.2, realiza una prueba para argumentar la proposición enunciada en el ítem anterior.

5) En la proposición 3.2, páginas 76 y 77 del libro: *Los números. De los naturales a los complejos de Matías Graña y otros*, se encuentra una propiedad junto con su demostración que contesta la siguiente pregunta ¿Cómo encontrar todas las soluciones de la ecuación (\*) cuando  $(a:b)$  divide a  $c$ , donde  $(a:b)$  indica el máximo común divisor entre  $a$  y  $b$ ? Lee detenidamente la demostración de dicha propiedad y encuentra las soluciones enteras de la siguiente ecuación diofántica:

$$84 \cdot x + 270 \cdot y = 66$$

**Escribe un algoritmo detallado de cómo encontrar la solución de dicha ecuación.**

**Utiliza dicho algoritmo para encontrar la solución de otra ecuación diofántica.**

### **Trabajo con dichas actividades**

#### **Actividad 7**

Esta actividad invita a los estudiantes a realizar una lectura de uno de los teoremas más importantes de la teoría de números y que fundamenta muchos de los cálculos escolares que realizamos: la factorización única de un número entero compuesto como producto de números primos. Esta lectura incluye la demostración matemática del teorema.

Para realizar la lectura y su comprensión la actividad sigue una secuencia guiada de preguntas. Estas preguntas permiten guiar al estudiante en la lectura de la proposición y de los pasos secuenciados de la demostración, en dos niveles: en su estructura lógica y en su estructura matemática, como contenido matemático. Entender este teorema va a permitir en un paso posterior poder aplicarlo a nuevos problemas.

Un modo de trabajo con esta actividad es que los estudiantes se reúnan en grupos de dos o tres personas e intenten primero contestar las preguntas sobre la interpretación del enunciado de la proposición. Luego, el docente puede invitar a los estudiantes que compartan sus respuestas y escriban entre todos una respuesta compartida a cada una de las preguntas de esta actividad. De la misma manera, se puede trabajar con las preguntas referidas a la demostración. Otra metodología de trabajo es después de contestar las preguntas y hacer una puesta en común de todas las posibles respuestas, se puede escribir en cada parte de la demostración de la propiedad alguna explicación de por qué se puede decir tal afirmación, o se les puede pedir que reescriban la demostración diciendo en cada afirmación por qué sucede. A modo de ejemplo, extraemos dos partes de la demostración con su justificación y las justificaciones del enunciado del teorema.

**Enunciado del Teorema Fundamental de la Aritmética:** Todo número entero  $n$  distinto de 0, 1, -1 se factoriza como producto de primos. Más aún, esta factorización es única, salvo por el orden de los factores.

### **Explicación:**

- 1) El teorema afirma que podemos factorizar cualquier número entero, salvo el 0, 1, -1, como productos de primos.
- 2) La factorización de cualquier número entero salvo los nombrados en el ítem 1) es única, es decir, no existe dos factorizaciones distintas del mismo número entero.
- 3) Cada número entero, salvo 0, 1, -1, admite una factorización como producto de números primos. Por lo tanto, de ahora en más cuando decimos la factorización de un número entero nos referimos a su escritura como producto de números primos.
- 4) La factorización de un primo  $p$  es el mismo primo  $p$  (tiene solo un factor, el mismo).

### **Extracción de dos partes de la demostración:**

**Existencia:** " Dado que  $P \subseteq \mathbb{N}$ , si fuera no vacío,  $P$  tendría un primer elemento, digamos  $n_0$ ."

**Explicación de este fragmento:** Por el principio de buena ordenación todo subconjunto no vacío de los naturales tiene un primer elemento (un mínimo, en el sentido que todo elemento de dicho conjunto es mayor que él). Por lo tanto, como  $P$  es un conjunto de los naturales con elementos, tiene que tener un primer elemento que llamamos  $n_0$ .

**Unicidad:** " $p_{r+1}$  divide al producto de primos  $p_1' \dots p_r'$ "; por lo tanto, divide a alguno de los factores; pero como todos ellos son primos positivos, necesariamente coincide con alguno de estos factores, es decir que:  $p_{r+1} = p_{j_0}'$ , para algún subíndice  $j_0$ "

**Explicación de este fragmento:** Como  $p_{r+1}$  divide a  $p_1' \dots p_r'$  y  $p_{r+1}$  es primo, entonces  $p_{r+1}$  divide a alguno de ellos, por ejemplo a  $p_{j_0}'$ . Por lo tanto,  $p_{j_0}' = p_{r+1} \cdot q$ , pero como  $p_{j_0}'$  es primo y positivo, entonces  $q=1$ , pues sino sería compuesto.

El docente puede hacer explícito que en la demostración hay varias técnicas usadas.

- En la existencia se usa la demostración por casos: se prueba que para un número natural cualquiera la tesis se cumple, es decir que se factoriza como producto de primos. Luego para los enteros negativos se remite a lo demostrado

anteriormente, diciendo que, si  $n$  es negativo, entonces  $-n$  es positivo y ya está demostrado.

- En la existencia se usa además de la hipótesis de que  $n$  es entero distinto de 1, -1 y 0, otra propiedad ya demostrada y que aquí se usan como hipótesis no escrita (hipótesis implícita): Principio de buena ordenación.
- En la unicidad usamos para demostrarlo el Principio de Inducción, técnica que los estudiantes aprendieron en la unidad anterior.
- En la unicidad se usa además de la hipótesis, otra propiedad ya demostrada y que aquí se usan como hipótesis implícita: Si  $p|a \cdot b$  y  $p$  es primo entonces  $p|a$  o  $p|b$ .

### Actividad 8

El objetivo de esta actividad es aplicar el Teorema Fundamental de la Aritmética a problemas matemáticos: tanto teóricos como prácticos.

Algunas intervenciones docentes para la realización de cada ítem de la actividad pueden ser las siguientes:

- ¿Por qué cualquier número  $n$  compuesto es divisible por un primo? ¿Cómo se usa la factorización del número compuesto en este caso?
- Supongamos que tenemos la factorización de un entero  $a$  y la factorización de un entero  $b$ , distinto de  $a$ , ¿existe algún primo que se encuentra en la factorización de  $a \cdot b$  pero que no se encuentra en  $a$  o en la de  $b$ ?
- Supongamos que  $a = p^n \cdot q^m$  y que  $b = p^s \cdot q^t$  con  $n, m, s$  y  $t$  naturales,  $p$  y  $q$  primos. ¿cuántas veces aparece el primo  $p$  en la factorización de  $a \cdot b$ ?
- ¿Qué justifica la afirmación matemática que  $p|a$  si y solo si  $p$  aparece en la factorización de  $a$ ?

Todas estas actividades se justifican con el Teorema Fundamental de la Aritmética. Si los estudiantes se traban en el ítem 2) de la actividad, se les puede proponer el siguiente problema:

<b>Problema propuesto:</b>
----------------------------

- |   |
|---|
| <b>1) Escribe la factorización de <math>a</math> y de <math>b</math> como producto de primos.</b> |
|---|

- 2) ¿Cómo es la factorización de  $a^2$  y de  $b^2$  usando el ítem 1)?
- 3) Supongamos que el primo 2 aparece  $2n$  veces en  $a^2$  y  $2m$  veces en  $b^2$ , ¿cuántas veces aparece 2 en la factorización de  $8b^2$ ? ¿Aparece la misma cantidad de veces el 2 en la factorización de  $a^2$  y de  $8b^2$ ?

*Resolución del ítem 2) Supongamos que existen  $a$  y  $b$  tales que  $a^2=8b^2$ . Si 2 no está en la factorización de  $a$  entonces por el Teorema Fundamental de la Aritmética, 2 no está en la factorización de  $a^2$ . Pero 2 está en la factorización de  $8b^2$ , pues es un divisor de él. Por lo tanto, no existiría  $a$  y  $b$  que cumplan que  $a^2=8b^2$ . Si en cambio 2 está en la factorización de  $a$ ; más aún aparece  $n$  veces. Entonces  $2^{2n}$  aparece en la factorización de  $a^2$ . Si ahora, 2 no está en la factorización de  $b^2$  entonces 2 aparece 3 veces en la factorización de  $8b^2$ . Pero como,  $a^2=8b^2$ , ambos números tienen que tener la misma factorización en producto de primos; por lo tanto,  $2n=3$  (es decir tanto  $a^2$  como  $8b^2$  tiene que tener la misma cantidad de 2), pero esto es un absurdo ya que  $2n$  es par y 3 es impar. Por lo tanto, 2 está en la factorización de  $b^2$ . Supongamos que aparece  $m$  veces, así, por el Teorema Fundamental de la Aritmética tenemos que  $2n=3+2m$ , con  $n$  y  $m$  enteros. Esto también es un absurdo ya que  $2n$  es par y  $3+2m$  es impar (suma de un par y un impar; tema ya trabajado en Introducción a la Matemática). Por lo tanto, no existen  $a$  y  $b$  enteros tales que  $a^2=8b^2$*

### **Actividad 9**

Esta actividad tiene dos objetivos. Por un lado, la conjetura de una propiedad matemática a través de la exploración con ejemplos, y la posterior aplicación de una propiedad enunciada restringido a un conjunto numérico. Por otro lado, la aplicación de una demostración matemática para poder resolver un problema; en este caso decidir cuándo una ecuación lineal con dos variables tiene solución entera y cómo son esas soluciones.

En la primera parte de la actividad los estudiantes a partir de distintos valores de  $a$ ,  $b$ , y  $c$  enteros tienen que poder conjeturar cuándo una ecuación del tipo

$$ax+by=c (*)$$

no tiene soluciones enteras. En la puesta en común el docente tiene que recuperar todos los ejemplos y estudiar las conjeturas. Algunos posibles ejemplos:

- 1)  $a=2$ ,  $b=4$  y  $c=3$  ( $a$  y  $b$  par y  $c$  impar). La ecuación  $2x+4y=3$  no tiene solución entera porque  $2x+4y$  es par para cualquier  $x$ ,  $y$  enteros; en cambio  $3$  es impar.
- 2)  $a=3$ ,  $b=6$  y  $c=7$  ( $a$  y  $b$  son divisibles por  $3$  y  $c$  es divisible por  $7$ ). La ecuación  $3x+6y=7$  no tiene solución entera pues  $3x+6y=3(x+2y)$  es múltiplo de  $3$  para cualquier  $x$  e  $y$ ; en cambio  $7$  no es múltiplo de  $3$ .
- 3)  $a=6$ ,  $b=12$  y  $c=3$  ( $a$  y  $b$  son múltiplos de  $6$  y de  $3$ , y  $c$  solamente es múltiplo de  $3$ ). La ecuación  $6x+12y=3$  no tiene solución entera pues  $6x+12y=6(x+2y)$  es múltiplo de  $6$  pero  $3$  no es múltiplo de  $6$ .

Es muy probable que la respuesta a la pregunta de la actividad: ¿cuándo la ecuación (\*) no tiene soluciones enteras? esté ligada fuertemente al ejemplo dado y no puedan dar una generalización para todos los ejemplos. Un posible trabajo si surge esa posibilidad es la siguiente:

**Problema propuesto:**

- 1) **Calcula el máximo común divisor entre  $a$  y  $b$  en cada uno de los ejemplos, es decir  $(a:b)$ , ¿es un divisor de  $c$ ?**
- 2) **¿Todos los ejemplos cumplen la condición trabajada en el ítem 1)?**
- 3) **¿Qué tienen en común todos los ejemplos? Enuncia una proposición matemática que abarque todos los casos.**

Luego, se los invita a leer la proposición 5.1.2 que se encuentra en el *Libro Álgebra I de Teresa Krick, página 172* y analizar si el enunciado de la proposición explica el por qué no tiene solución entera cada uno de los ejemplos proporcionados.

**Proposición 5.1.2.** (Ecuación diofántica y máximo común divisor.)

Sean  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  con  $a, b$  no nulos. La ecuación diofántica

$$aX + bY = c$$

admite soluciones enteras si y solo si  $(a : b) \mid c$ . Es decir:

$$\exists (x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2 : ax_0 + by_0 = c \iff (a : b) \mid c.$$

*Demostración.* •  $(\Rightarrow)$  Sea  $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$  una solución entera, entonces, como siempre, dado que  $(a : b) \mid a$  y  $(a : b) \mid b$ , se concluye que  $(a : b) \mid ax_0 + by_0 = c$ , es decir,  $(a : b) \mid c$ .

•  $(\Leftarrow)$  Sabemos que existen  $s, t \in \mathbb{Z}$  tales que  $(a : b) = sa + tb$ . Luego, dado que  $(a : b) \mid c$ , existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $c = k(a : b)$ , y por lo tanto se tiene que  $c = a(ks) + b(kt)$ . Podemos tomar  $x_0 := ks$ ,  $y_0 := kt$ .

Notemos que si  $(a:b)$  no divide a  $c$  entonces la ecuación (\*) no tiene soluciones enteras. En este punto el docente puede recordar el contrarrecíproco, tema trabajado en Introducción a la Matemática: Si  $p \rightarrow q$  es verdadera, entonces  $\neg q \rightarrow \neg p$  también es verdadera. ¿Cuál es el contrarrecíproco de la proposición: Si la ecuación (\*) admite soluciones enteras entonces  $(a:b) \mid c$ ?

Después de este trabajo el docente puede invitar a los estudiantes a demostrar la proposición matemática que contesta la pregunta ¿cuándo este tipo de ecuaciones lineales no tiene solución entera?

**Proposición: Si  $(a:b)$  no divide a  $c$  entonces la ecuación  $ax+by=c$  no tiene soluciones enteras.**

Si los estudiantes no pueden demostrar esta propiedad, el docente puede realizar las siguientes preguntas:

- 1) Una posible demostración de esta proposición es por la reducción por el absurdo. Supongamos que existe una solución entera de  $ax+by=c$ . ¿Qué significa que exista una solución entera? Escríbelo explícitamente.
- 2) ¿Cuál es la definición de máximo común divisor de  $a$  y  $b$ ? ¿Por qué  $(a:b) \mid a$  y  $(a:b) \mid b$ ?
- 3) A partir de que  $(a:b) \mid a$  y  $(a:b) \mid b$ , ¿cómo puedes deducir que  $(a:b) \mid c$ ?

4) ¿Existe una contradicción? Si existe ¿de dónde proviene? ¿Qué se concluye?

**Posible demostración:** *Supongamos que  $ax+by=c$  tiene solución entera. Entonces existen  $(x_0, y_0)$  con componentes enteras, tales que  $ax_0+by_0=c$  (ya que es solución de la ecuación). Como  $(a:b)|a$  y  $(a:b)|b$  pues el máximo común divisor entre  $a$  y  $b$  es un número natural  $(a:b)$  que divide a ambos números y además es el mayor número que divide a ambos. Por propiedades matemáticas trabajadas en la Actividad 1, se tiene que  $(a:b)|ax_0+by_0$ . Así  $(a:b)|c$  pero esto es una contradicción porque la hipótesis partía de que  $(a:b)$  no es un divisor de  $c$ . Esta contradicción provino de suponer que existe una solución entera de la ecuación (\*). Por lo tanto, no tiene soluciones enteras.*

Una pregunta transversal que se puede hacer, y cuyo objeto es mostrar los límites de una proposición matemática es ¿se puede aplicar esta propiedad para encontrar soluciones reales no enteras? Se puede observar que la ecuación  $ax+by=c$  tiene infinitas soluciones reales de manera que si  $x$  es real entonces  $y=1/b(c-ax)$ . Más aún el conjunto de soluciones de la ecuación representa una recta numérica en el plano cartesiano  $XY$ . Por otro lado no tiene sentido la expresión  $(a:b)|c$  en los números reales ya que todo número real no nulo divide a otro, ya que todo número distinto de cero tiene inverso multiplicativo.

Por último, se los invita a los estudiantes a leer una demostración matemática constructiva e intentar aplicar cada uno de los pasos dados para encontrar las soluciones enteras de la ecuación diofántica  $84x+270y=66$ . En la puesta en común se puede pedir a los estudiantes que enumeren paso a paso un algoritmo para encontrar las soluciones, ejemplificando con el problema. Un posible algoritmo puede ser el siguiente:

**Algoritmo para encontrar las soluciones de una ecuación diofántica  $ax+by=c$**

- 1) Verificar si tiene soluciones enteras: hacer  $(a:b)$  y ver si es divisor de  $c$ , si es divisor tiene soluciones enteras, si no lo es no tiene soluciones enteras.**

Ejemplo:  $(84:270)=6$  divide a 66 entonces la ecuación diofántica tiene solución entera.

- 2) Si tiene solución entera, dividir todos los miembros de la ecuación diofántica por  $(a:b)$ .**

Ejemplo:  $\frac{84}{(84:270)}x + \frac{270}{(84:270)}y = \frac{66}{(84:270)}$ , que equivale a  $14x+45y=11$ .

*Nota: La ecuación del paso 2) cumple que el máximo común divisor de los coeficientes es 1; es decir  $a_1 x + b_1 y = c_1$  (\*\*), donde  $a_1 = \frac{a}{(a:b)}$ ,  $b_1 = \frac{b}{(a:b)}$  y  $c_1 = \frac{c}{(a:b)}$  cumple que  $(a_1 : b_1) = 1$ . Esta ecuación equivalente tiene las mismas soluciones que la original.*

- 3) Encontrar una solución particular,  $(x_0, y_0)$  donde  $x_0$  e  $y_0$  son enteros, de la ecuación (\*\*).**

Ejemplo:  $14x + 45y = 11$  cumple que  $(14:45) = 1$  y una solución particular es  $(4, -1)$ .

- 4) Supongamos que  $(x, y)$  es otra solución de la ecuación (\*\*). Plantear que**  
 $a_1 x + b_1 y = a_1 x_0 + b_1 y_0$

Como  $(x_0, y_0) = (4, -1)$  tenemos que  $14x + 45y = 14 \cdot (4) + 45 \cdot (-1)$

- 5) Reescribir el paso 4 como  $a_1 (x - x_0) = b_1 (y_0 - y)$  (\*\*\*)**

Ejemplo:  $14(x - 4) = 45(-1 - y)$

- 6) Del paso 5, tenemos que  $b_1 \mid a_1 (x - x_0)$  y como  $(b_1 : a_1) = 1$  entonces  $b_1 \mid (x - x_0)$**

Ejemplo:  $45 \mid 14(x - 4)$  pero como  $(45 : 14) = 1$  entonces  $45 \mid (x - 4)$ .

- 7) Del paso 6, tenemos que existe  $k$  entero tal que  $x - x_0 = b_1 \cdot k$**

Ejemplo:  $x - 4 = 45 \cdot k$  para algún  $k$  entero.

- 8) Reemplazar en la igualdad del paso 5 (\*\*\*) la igualdad del paso 7, es decir**  
 $a_1 b_1 k = b_1 (y_0 - y)$

Ejemplo:  $14 \cdot 45 \cdot k = 45 \cdot (-1 - y)$ , con  $k$  entero.

- 9) Del paso 8 deducimos que  $y_0 - y = a_1 k$**

Ejemplo:  $-1 - y = 14 \cdot k$  con  $k$  entero

- 10) En conclusión, todas las soluciones de la ecuación entera original salen de los pasos 7) y 9), es decir son de la forma  $x = x_0 + b_1 k$ ,  $y = y_0 - a_1 k$ , con  $k$  entero.**

Ejemplo: las soluciones enteras de la ecuación  $84x+270y=66$  son  $x=4+45.k$ ,  $y=-1-14.k$  con  $k$  entero.

### 5.3 Mejoras de esta secuencia respecto de las actividades analizadas

#### A nivel del estudiante:

- Está diseñada para trabajarse tanto en la presencialidad como en la virtualidad. En la presencialidad el contenido a enseñar está mediado y orientado por el trabajo del docente, a través de actividades y preguntas que permiten al estudiante reflexionar y organizar lo que está aprendiendo, por lo que se hace indispensable explicitarlo para un trabajo en la virtualidad. Por ello, resulta indispensable enunciar el problema con preguntas que permitan organizar la actividad y poner de manifiesto lo que se quiere enseñar.
- Esta secuencia didáctica permite al estudiante realizar sub-tareas de la actividad planteada, haciendo explícito todo lo que tiene que resolver para contestar la pregunta que plantea la actividad. Se le pide al estudiante que reflexione y escriba cada una de estas sub-tareas y que a partir de ellas conteste la pregunta.
- Esta secuencia vuelve en todo momento sobre conceptos ya aprendidos en Introducción a la Matemática o a conceptos de unidades anteriores de la materia Álgebra I, los profundiza y avanza en el aprendizaje de nuevas habilidades matemáticas. Más particularmente, recupera lo trabajado en Introducción a la Matemática y que tiene que ver con el razonamiento matemático, la lógica proposicional y el análisis de verdad y sus argumentaciones para decidir sobre la verdad o falsedad de una proposición.
- Esta secuencia permite hacer partícipe al estudiante en la construcción de todos los pasos previos a entender una demostración matemática y a realizarla, por ejemplo: conjetura de una proposición matemática, análisis de sus partes y de su valor de verdad, restricciones de las hipótesis para que una proposición matemática sea verdadera, construcciones de argumentaciones para indicar si es verdadera o falsa, aplicación de propiedades a otros problemas, análisis del recíproco y contrarrecíproco de una proposición, explicación de una propiedad o prueba y construcción de una prueba matemática.

- Avanza en la construcción deductiva lógica y en las actividades demostrativas.
- Permite el aprendizaje de los números enteros: divisibilidad, primos y compuestos, factorización de un número entero, ecuaciones diofánticas.
- Permite el aprendizaje de habilidades matemáticas previas a la comprensión y realización de una demostración matemática; habilidades que se transforman en contenido matemático, porque son propias del hacer en matemática.
- Permite avanzar en la comprensión de una demostración matemática: lectura reflexiva de un teorema y su aplicación, lectura comprensiva de las partes de una demostración para la realización de una nueva demostración para resolver un problema o para el armado de un algoritmo que permite resolver cierto tipo de ecuaciones lineales.

#### **A nivel del docente.**

- Esta secuencia didáctica pretende secuenciar explícitamente, a través de actividades, las habilidades matemáticas que son necesarias enseñar para que los estudiantes puedan conjeturar, argumentar, leer y escribir en matemática.
- Esta secuencia didáctica pretende mostrar los modos de trabajo con las actividades para generar en los estudiantes la comprensión y realización de actividades previas a la demostración matemática.
- Esta secuencia didáctica pretende guiar, a través de una secuencia guiada de preguntas y actividades, cómo, para qué y por qué son necesarias las demostraciones matemáticas en el estudio de contenidos algebraicos de Álgebra I.
- Las habilidades matemáticas que muestra las actividades de la secuencia didáctica se pueden extrapolar a cualquier contenido algebraico de números enteros a enseñar, en las primeras materias de un profesorado universitario de Matemática con características parecidas a UNAHUR. Estas habilidades son:
  - 1) Conjeturar una proposición matemática a partir de la regularidad numérica.
  - 2) Armado de proposiciones matemáticas usando conectores lógicos simbólicos o en lenguaje coloquial.

- 3) Identificación de las partes de una proposición matemática: hipótesis, tesis y conectores lógicos.
- 4) Interpretación matemática y lógica de una proposición matemática.
- 5) Argumentación del valor de verdad de una proposición matemática: prueba matemática si es verdadero o contraejemplo si es falso.
- 6) Aplicación de propiedades matemáticas a nuevos problemas.
- 7) Restricción de la hipótesis de una proposición matemática falsa para que se convierta en verdadera.
- 8) Comprensión de un teorema y su demostración: tanto desde el punto de vista lógico como matemático, a través de una guía secuenciada de preguntas.
- 9) Análisis de demostraciones matemáticas: desde su estructura lógica (uso de tipos de demostraciones -método directo, por inducción, por reducción de casos o por reducción al absurdo) y desde su significado matemático (pasos deductivos que argumentan el por qué la tesis del teorema y utilización en nuevos problemas).
- 10) Utilización de una demostración para probar otras propiedades matemáticas o para resolver nuevos problemas.

#### **5.4 Conclusiones**

Este Trabajo Final de Especialización en Docencia Universitaria proporciona una serie de actividades demostrativas, a través de una secuencia didáctica, que avanza en la construcción de la demostración matemática y su enseñanza de los números enteros. Actividades demostrativas que trabajan la exploración y el armado de conjeturas, identificación de las partes de una proposición matemática y análisis de los valores de verdad, lectura comprensiva de una proposición matemática y su demostración a partir de preguntas guiadas y utilización de propiedades y demostraciones en otros problemas matemáticos. En el armado de esta secuencia didáctica se tuvo presente el análisis del trabajo realizado en Álgebra I (ciclo 2020) del Profesorado Universitario de Matemática de UNAHUR y las actividades y habilidades trabajadas en Introducción a la Matemática.

Las actividades demostrativas desarrolladas en este trabajo final constituyen una construcción colectiva e individual que permite al estudiante ser protagonista del proceso de construcción de la noción de divisibilidad, factorización de los números enteros y la resolución de ecuaciones diofánticas, tanto desde sus aplicaciones como en sus fundamentos y conceptualizaciones.

La idea central de este trabajo es proponer una serie de actividades demostrativas secuenciadas acerca de las demostraciones matemáticas en los números enteros, como forma de producción de conocimiento y de validación de los mismos. La incorporación de preguntas a esta secuencia didáctica guía al estudiante en la resolución de la actividad y lo acerca a lo que se quiere enseñar, permitiéndole ser protagonista tanto en la construcción de los pasos previos a entender una demostración matemática como en la realización de la misma. Es deseable que los estudiantes puedan transitar esta experiencia de aprendizaje y que la puedan aplicar con sus futuros estudiantes.

Si bien este trabajo pone su atención en la enseñanza de la demostración matemática en los números enteros de manera articulada con Introducción a la Matemática, sería deseable que estos modos de trabajar con la demostración matemática puedan extenderse a otros contenidos matemáticos de Álgebra.

Queda pendiente, para próximas investigaciones, la implementación de esta secuencia didáctica con los estudiantes de Álgebra I y el análisis de dicha implementación.

## Referencias bibliográficas

- Balacheff, N. (1982). *Preuve et démonstration en mathématiques au collège*. Recherches en Didactique des Mathématiques 3(3), 261-304.
- Balacheff, N. (1987). *Processus de preuve et situations de validation*. Educational Studies in Mathematics, 18, 147-176.
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: una empresa docente y Universidad de Los Andes.
- Bell, A. (1976), *A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations*, Educational Studies in Mathematics 7: 23-40.
- Bravo Estévez, L. y Arrieta, J. (2003). *Una estrategia didáctica para la enseñanza de las demostraciones geométricas: resultados de su implementación*. En E. Castro Martínez (Ed), Investigación en Educación Matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 7, 153 – 160. España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Brousseau G. (1986): *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática*, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).
- Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria*. Tesis doctoral, Universitat de València, Valencia.
- Chevallard, Y. y Tonnelle, J. (1982). *Evidence et démonstration. Actes de la III<sup>e</sup> Ecole d'été de didactique des mathématiques*. Orléans: Ed. A. Rouchie.
- Chevallard, I. (1991), *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*, Aique, Buenos Aires.

D'Andrea, R.E. (2010). *Análisis del razonamiento deductivo de estudiantes de carreras de Ciencias Naturales e Ingenierías en el proceso de validación de proposiciones matemáticas*. Tesis de Maestría. Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Comahue. Neuquén. Argentina.

D'Andrea, R. E., y Sastre, P. (2014). *¿Cómo generar habilidad para demostrar?* En Lestón, P. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 471-479). México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

de Villiers, M. (1993). *El papel y la función de la demostración en matemáticas*. *Épsilon* 26, 15-30.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fiallo, J.; Camargo, L.; Gutiérrez, A. (2013): *Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas*, *Revista Integración*, 31(2), 181-205

Fischbein, E. (1982). *Intuition and proof*. For the learning of mathematics, 3(2), pp. 9-24.

Garnier, R. y Taylor, J. (1996). *100% Mathematical Proof*. New York: John Wiley and Sons.

Godino J., Recio A.(2001), *Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática*, *Enseñanza de las Ciencias* 19, no. 3, 405-414.

Hanna, G. (1989). *More than formal proof*. *For the Learning of Mathematics*, 9 (1), 20-23. Fischbein E., *Intuition in science and mathematics*, Dordrecht, Los Países Bajos, D. Reidel, 1987.

Hanna, G. y Jahnke, H. N. (1996). *Proof and proving*. En A. J. Bishop et al. (Eds.): *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Hanna, G. (2000). *Proof, explanation and exploration: an overview*. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5 - 23.

Ibañes, M. y Ortega, T. (1997). *La demostración en Matemáticas. Clasificación y Ejemplos en el Marco de la Educación Secundaria*. Educación Matemática. Vol. 9, no. 2.

Krummeheuer, G. (1995). *The ethnography of argumentation*, en Cobb, P. y Bauersfeld, H. (eds.). *The emergence of mathematical meaning*. Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Maggio, Mariana (2018). *Reinventar la clase en la universidad* (1ra. edición). Buenos Aires: Paidós.

Leron, U. (1983). *Structuring Mathematical Proofs*. *The American Mathematical Monthly*, 90, (3), 174– 185.

Panizza, M (2005). *Razonar y conocer: aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos*. Buenos Aires, Primera Edición. Libros del Zorzal. Colección Formación Docente/Matemática

Parra, B. (1990). *Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas*. En: Alarcón Bortolussi, J.; Rosas Domínguez, R.S. (coord.). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria*. Lecturas. 1995. p. 13. SEP, México. (Primer nivel. Programa Nacional de Actualización Permanente. Originalmente apareció en la revista Educación Matemática, 2(3). 1990.

Recio, A.M. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Solow, D. (1992). *Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas*. México: Limusa. Noriega Editores.