LIBRO PARA EL DOCENTE

MARIANA VALERIA PÉREZ

ÁLGEBRA LINEAL

UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA CARRERAS DE INGENIERÍA

: AULA ABIERTA :

Libros de UNAHUR

Libro para
el docente

Álgebra Lineal

Una propuesta de enseñanza para carreras de Ingeniería

Libros de
UNAHUR

Libro para
el docente

Álgebra Lineal

Una propuesta de enseñanza para carreras de Ingeniería

MARIANA VALERIA PÉREZ

: AULA ABIERTA :

Pérez, Mariana Valeria
Álgebra Lineal : una propuesta de enseñanza para las carreras de Ingeniería / Mariana Valeria Pérez. - 1a edición para el profesor - Villa Tesei : Libros de UNAHUR, 2019.
256 p. ; 24 x 17 cm. - (Aula Abierta)

ISBN 978-987-47285-0-0

1. Matemática para ingenieros. 2. Didáctica. 3. Material auxiliar para la enseñanza. I. Título.
CDD 512.5

1ª edición, septiembre de 2019

UNIVERSIDAD NACIONAL DE
HURLINGHAM

Rector
Jaime Perczyk

Libros de
UNAHUR

Jefa Departamento editorial
Silvana Daszuk

Coordinación editorial y edición
Silvana Daszuk

Diseño de maqueta
www.trineo.com.ar

Maquetación
Alberto Moyano

Diagramación de tapa
Miguel Canella

ISBN 978-987-47285-0-0

Índice

Presentación de la colección Aula Abierta

La obra *Álgebra Lineal. Una propuesta de enseñanza para carreras de Ingeniería* nace de la experiencia de una profesora/ investigadora en la Universidad Nacional de Hurlingham, con el objetivo de acercar a colegas docentes y a estudiantes una propuesta de enseñanza contextualizada de ciertos contenidos que suelen dictarse de manera "universal". Justamente, gran parte de la originalidad y el valor didáctico de esta obra, compuesta por un *Libro para el docente* y un *Libro para el estudiante*, radican en que orienta la selección de temas de Álgebra Lineal y Geometría Analítica, las secuencias de problemas y los ejercicios que ofrece en el *para qué* los necesitan los futuros egresados y egresadas de las carreras de ingeniería.

Esta obra inaugura la colección Aula Abierta, dirigida a docentes y estudiantes del nivel superior tanto de nuestra universidad como de otras instituciones universitarias y terciarias. La colección tiene como principal objetivo poner en circulación el conocimiento producido en el quehacer mismo de la enseñanza en nuestras aulas, ya que sistematiza en forma de libros las prácticas de los y las docentes para responder a los desafíos y necesidades que surgen de dar clase a estudiantes de los primeros años del nivel superior.

Esos desafíos no son pocos ni sencillos. Algunos se explican por el gran salto que existe en los contenidos de ciertas disciplinas entre el nivel secundario y el superior, por complejidad y profundidad. Otros brotan fruto de características específicas que la UNAHUR comparte con otras universidades del conurbano bonaerense, donde más del 70 % de los estudiantes son los primeros en sus familias que cursan estudios superiores, en carreras no tradicionales. En otros casos, esos desafíos implican mejorar la calidad de los aprendizajes priorizando los diversos contextos de estudio –y luego profesionales– que deben tenerse en cuenta para enseñar una disciplina según para qué carreras y perfiles de egresados se dicta. Y, también, responder a la necesidad de contar con libros de determinados contenidos, prácticas y materias para los que existe una vacancia de publicaciones y materiales didácticos actualizados.

La colección Aula Abierta, entonces, nace para acercar a los docentes y estudiantes libros actualizados y rigurosos, que nacen en y para las aulas. En algunos casos, las propuestas se conforman de un libro para el docente –con fundamentos, objetivos, decisiones sobre los contenidos y enfoques, además de actividades, secuencias o problemas concretos para trabajar en el aula– y otro con actividades para los estudiantes. En otros casos, se trata de un libro único.

La Universidad, a través de su editorial Libros de UNAHUR, espera que esta colección cumpla con sus objetivos de difundir el conocimiento disciplinar y didáctico-pedagógico generado en sus aulas, y se convierta en un aporte de referencia para docentes, estudiantes e investigadores del sistema nacional.

Lic. Jaime Perczyk
Rector de la Universidad Nacional de Hurlingham

Introducción

La intención al escribir *Álgebra Lineal. Una propuesta de enseñanza para carreras de Ingeniería* fue compartir la experiencia de enseñar contenidos de Álgebra Lineal y Geometría Analítica que no se ven en la escuela secundaria a estudiantes de primer año de las carreras de Ingeniería en Metalurgia e Ingeniería Eléctrica de la Universidad Nacional de Hurlingham (UNAHUR). Esta Universidad, de las más recientes del sistema público argentino, está ubicada en uno de los municipios más chicos de la Provincia de Buenos Aires, en el segundo cordón del conurbano bonaerense.

La propuesta de este material está conformada por dos libros: este volumen, dirigido a docentes, que se complementa con *Álgebra Lineal. Libro para el estudiante*, con ejercitaciones para quienes cursan la materia.

Además de presentar los temas y ejercitaciones de Álgebra Lineal y Geometría Analítica, este volumen para el docente tiene como objetivo reflexionar sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje que se produjeron en las primeras cursadas en la UNAHUR, como un aporte a quienes enseñan la materia en cualquier carrera de Ingeniería de otras universidades de características similares. Por ello, en estas páginas se revisará el camino recorrido desde el armado de la materia y los fundamentos que la sustentan hasta cómo fue el proceso de enseñanza y aprendizaje de los contenidos y las habilidades matemáticas.

El libro incluye, entonces, una propuesta didáctica para enseñar los contenidos de Álgebra y Geometría Analítica, reflexiones sobre la propuesta en sí y sobre las convicciones en las que se fundaron algunas decisiones para la enseñanza de la materia. También, presenta ideas sobre qué herramientas se debe brindar a los futuros ingenieros e ingenieras en sus trayectorias estudiantiles y laborales, y una mirada sobre las expectativas de los estudiantes que inician la cursada. Por otra parte, se exponen los fundamentos que guiaron el armado de las clases, la relación entre los contenidos teóricos y los prácticos, el rol del docente a la hora de comunicar los temas del programa, cómo se trabajan los ejercicios y el proceso de evaluación.

Debido al nivel de abstracción que deben enfrentar los estudiantes de Álgebra y Geometría Analítica, la materia tiene fama de ser difícil, por lo que no hay que perder de vista que, para los estudiantes de Ingeniería, la matemática es una herramienta, y siempre se intentará mantener esa perspectiva. Como dice Luis A. Santaló en *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*: "A los profesores de Matemática nos corresponde seleccionar, de toda la matemática existente, la clásica y la moderna, aquella que pueda ser útil a los educandos… Para esa selección, hay que tener en cuenta que la matemática tiene un valor formativo, que ayuda a estructurar el pensamiento y agilizar el razonamiento deductivo, pero que también es una herramienta que sirve para el accionar diario y para muchas tareas específicas de casi todas las actividades laborales" (ver Parra y Saiz 1994, cap. 1, pág. 21-39).

Este volumen está organizado en tres partes. La primera, "Contexto y armado de la materia", expone el contexto institucional en el que está inserta la materia y dónde se ubica en el plan de estudios de las Ingenierías Eléctrica y Metalúrgica, además de relevar algunas características de la Universidad Nacional de Hurlingham y el perfil del estudiantado. Luego se reflexiona sobre la propuesta didáctica, mostrando algunos modos del trabajo en clase y el tipo de problemas modelo que se usa para introducir los conceptos. Antes de comenzar estas reflexiones, se incluye un breve resumen de la historia del Álgebra Lineal, haciendo énfasis en su importancia para los futuros ingenieros e ingenieras. Por último, se exponen algunas conclusiones y se muestran los resultados de una encuesta que se hizo a los estudiantes acerca de la recepción de este trabajo.

La segunda parte del libro, "Propuesta didáctica para trabajar en clase", se organiza en siete capítulos que corresponden a las unidades 1 a 7 del programa. Cada uno incluye los objetivos y los contenidos, junto con la propuesta didáctica para el dictado de las clases.

Finalmente, la tercera parte reúne tres Anexos: el programa aprobado por el Consejo Superior de la Universidad, un trabajo con cónicas y Geogebra, y dos modelos de evaluaciones (uno para los capítulos 1 a 4 y otro que abarca del 5 al 7), denominados A, B y C, respectivamente. El trabajo práctico del Anexo B, que corresponde a la unidad 8 del programa "Introducción a las cónicas como lugar geométrico", es una propuesta para que desarrollen los estudiantes, organizados en grupos reducidos, con una entrega final; implica la lectura reflexiva de un material y la realización de ejercicios de exploración usando la computadora (véase el Programa de la materia).

El libro que completa la propuesta, *Álgebra Lineal. Libro para el estudiante*, compila ejercicios organizados por unidades y por temas. También ofrece, al final de cada unidad, un conjunto de problemas más complejos para que los estudiantes integren reflexivamente esos contenidos.

Esperamos que esta obra se convierta en una herramienta útil para apoyar la tarea de los y las docentes de la disciplina y, a la vez, se enriquezca en ese diálogo.

Mariana Valeria Pérez

Primera parte

Contexto y armado de la materia

I

Escenario de la materia Álgebra y Geometría Analítica

La Universidad Nacional de Hurlingham (UNAHUR) fue creada por la Ley 27.016 del Congreso Nacional, aprobada en noviembre de 2014 y promulgada el 2 de diciembre de ese año. Comenzó su primer ciclo lectivo en 2016, siguiendo los objetivos de contribuir al desarrollo local y nacional a través de la producción y distribución equitativa de conocimientos e innovaciones científico-tecnológicas, con un fuerte compromiso con la formación de excelencia y la inclusión. La UNAHUR es una de las 60 universidades que, junto con cinco Institutos universitarios, conforman el sistema público, no arancelado, de la Argentina.

A la hora de diseñar la oferta académica, la UNAHUR evitó la superposición con otras universidades del Gran Buenos Aires y, a la vez, respondió a una demanda histórica de la región: evitar que muchos de los y las 2500 estudiantes que finalizan cada año la escuela secundaria deban viajar hasta la ciudad de Buenos Aires o a otras localidades para cursar estudios universitarios. En la actualidad, la mayoría de esos jóvenes tiene la posibilidad de estudiar una carrera universitaria de calidad en la zona donde vive.

Desde su creación, la UNAHUR ha ido sumando carreras y su matrícula ha crecido ininterrumpidamente. En 2016 se inscribieron 3758 estudiantes, el 70 % de ellos vecinos de Hurlingham; en 2017 se sumaron algo más de 4000; en 2018, 4500 y, en la primera inscripción de 2019, alrededor de 5000 más.

Esta Universidad no solo ofrece estudios superiores de alto nivel académico y fomenta la investigación científica y tecnológica, sino que también es un espacio abierto a la comunidad, con numerosas actividades de extensión, talleres culturales y deportivos, y otras actividades libres y gratuitas para niños y niñas, jóvenes y adultos de la zona. De este modo, se fortalecen los lazos de la UNAHUR con la comunidad a la vez que se promueve la vida cultural de la zona.

La oferta académica está organizada en tres ejes: salud, educación, producción y ciencia, que tienen su correlato en los Institutos de Salud Comunitaria, Educación, Biotecnología, y Tecnología e Ingeniería. En este se dictan las Tecnicaturas Universitarias en Diseño Industrial, Metalurgia, Electricidad e Informática; las carreras de Ingeniería Metalúrgica y Eléctrica, y la licenciatura en Diseño Industrial. Los planes de estudio son modulares y ofrecen títulos intermedios con el fin de facilitar una temprana inserción laboral.

El objetivo del Instituto de Tecnología e Ingeniería es formar profesionales que cubran las vacantes del sector público y privado, y constituirse en un escenario provilegiado donde se discuta la planificación estratégica de desarrollo tecnológico, incluyendo la docencia, la investigación y la extensión. Estos objetivos se fundan en la idea de que el desarrollo industrial nacional necesita dotarse de recursos humanos especializados que cubran los aspectos integrales del sector productivo, desde el conocimiento técnico específico hasta el inherente al planeamiento y gestión, con la capacidad de generar políticas públicas para el área.

El perfil de los estudiantes de la materia

Álgebra y Geometría Analítica se dicta en el segundo cuatrimestre del primer año de Ingeniería Metalúrgica, Ingeniería Eléctrica y de la Tecnicatura en Electricidad. Está enmarcada en el Campo de Formación Básica en Ingeniería (CFBI) del Plan de estudios, y es la tercera materia de Matemática que cursan los estudiantes, después de Introducción al Análisis Matemático y Análisis Matemático I. Es cuatrimestral, con una carga total de 96 horas cátedra repartidas en 6 horas semanales.

Como figura en el plan de estudio, la carrera de Ingeniería Metalúrgica tiene como objetivos la "formación de profesionales en el campo de la organización, dirección, ejecución y control de tareas productivas de instalación y mantenimiento de la industria metalmecánica, en la producción de bienes y servicios, con un fundamento sólido en los aspectos inherentes a las especificaciones y normas técnicas y de vinculación tecnológica, con capacidades para la creación de tecnología y su operación innovadora, con respeto por los factores sanitarios, legales, éticos, ambientales y de seguridad de la sociedad argentina".

Por su parte, los objetivos establecidos en el plan de Ingeniería Eléctrica son "la formación de profesionales capacitados para desarrollarse en todos los niveles del sector energético, como así también del sector productivo. Contará con una perspectiva integral inspirada en la concepción de la energía como un derecho para la población".

El ingeniero eléctrico estará formado para incidir directamente en la construcción, operación, reparación, mantenimiento e inspección de máquinas, equipos, instrumentos e instalaciones eléctricas, así como para dirigir, explotar y modificar los sistemas vinculados con la generación, el transporte, la transformación, la distribución y la comercialización de energía eléctrica.

De la matrícula de estudiantes de la UNAHUR, es pequeño el porcentaje que se inclina por las carreras de Ingeniería y la mayoría elige Eléctrica. Es relevante que muchos de los y las estudiantes que cursan las Tecnicaturas continúan sus estudios en Ingeniería. En el año 2016, los inscriptos en Ingeniería Eléctrica en el primer cuatrimestre fueron 81 estudiantes y en el segundo cuatrimestre, 84. En 2017, en el primer cuatrimestre el número ascendió a 103 estudiantes y se incrementó a 113 en el segundo cuatrimestre. En el año 2018, los inscriptos fueron 143.

En Ingeniería Metalúrgica, el número de inscriptos es mucho menor que en Eléctrica. En el primer cuatrimestre del año 2016 eran 42 estudiantes y en el segundo cuatrimestre, 50. En 2017, la cantidad bajó a 40 estudiantes, mientras que en 2018, aumentó a 46 estudiantes.

En cuanto a la materia Álgebra y Geometría Analítica, quienes la cursaron en 2016 tenían entre 18 años y 53 años, y predominaban los mayores de 35. El 50 % no trabajaba en actividades relacionadas con la industria y el 75 % eran primeros universitarios en la familia. La edad se fue modificando en los dos años siguientes, ya que creció el porcentaje de estudiantes menores de 35 años, que siguen siendo, mayoritariamente, primera generación de universitarios. Esto da indicios de la importancia que adquieren las carreras relacionadas con ingeniería en la localidad de Hurlingham, así como la existencia misma de la Universidad en el territorio.

En los primeros dos años, se pudo observar que los estudiantes que ya habían cursado la materia o contenidos relacionados en alguna otra institución traían una experiencia negativa; afirmaban que era una materia abstracta, lejana y muy difícil. Curiosamente, aquellos que nunca la habían cursado ni habían estudiado temas relacionados con estos compartían esa idea negativa (en general, los estudiantes que cursan por primera vez esta materia tienen alguna experiencia de clases de matemática con contenidos de Análisis Matemático).

Relato del primer día de clases

En primer día de clases de la materia en el segundo cuatrimestre de 2016 ilustra muy bien algunas de las concepciones que circulan entre docentes y estudiantes sobre los modos de enseñar y de aprender, y que a veces dificultan la posibilidad de cambiar el tipo de trabajo en las aulas.

Ya se mencionó que, en la UNAHUR, Álgebra y Geometría Analítica se cursa en el primer año de las ingenierías Metalúrgica y Eléctrica, y en la Tecnicatura en Electricidad. La materia tiene una sola cátedra en el turno de la noche, decisión cuyo objetivo es facilitar que los estudiantes que trabajan puedan cursarla. Además, la Universidad promueve que los estudiantes no solo presencien las clases sino que también puedan estudiar cada tema de manera continua y con algún grado de profundidad. Para ello, por ejemplo, se ofrecen tutorías en las que se discuten las resoluciones de los ejercicios. Además, como todas las materias de la UNAHUR, esta también cuenta con un aula virtual donde se suben apuntes, ejercicios prácticos y problemas, modelos de evaluación, un cronograma detallado de las clases, fechas de evaluación y otra información importante. El aula virtual brinda un foro de consultas en el que, semanalmente, se plantea alguna pregunta disparadora para que los estudiantes debatan y lleguen a una respuesta consensuada. Cuenta además con una herramienta de comunicación uno a uno para consultar dudas en forma individual y recibir una respuesta privada de un docente.

Valga aquí la licencia de narrar en primera persona el primer día de clase de la materia en 2016.

El primer día de clases estábamos todos ansiosos. En mi caso, se debía a que era la docente a cargo de la única comisión y era la primera vez que se dictaba la materia en la Universidad. A esto se sumaba que todavía no conocía al grupo. La ansiedad de los estudiantes, creo, nacía de que no me conocían, que no había una experiencia previa de cursada, además de que la mayoría, como pude comprobar más tarde, tenía la idea de que era una materia abstracta y muy difícil. Sin duda, esa idea provenía de experiencias anteriores propias y ajenas.

Me presenté. Les dije que era docente e investigadora, que mi investigación estaba orientada al Álgebra Computacional y a la Geometría Algebraica. Estoy segura de que, en ese momento, algunos estudiantes pensaron que las clases iban a ser tradicionales, llenas de teoremas y demostraciones, y que iban a entender poco o nada los contenidos, así que las ansiedades se potenciaban. En este punto querría explicar que, para mí, uno de los errores que cometemos los docentes es que no le damos un sentido a lo que enseñamos y exponemos los temas con palabras a veces vacías de ideas que inviten a aprender. Es necesario transmitir que es necesario aprender determinada idea matemática, trasmitir cómo esa idea o conocimiento va a permitir resolver un problema, *alcanzar una solución que se hace difícil, o incluso imposible, de encontrar con los conocimientos previos.*

En otras palabras, mi objetivo era intentar transmitir ideas útiles para la formación profesional. Quería usar mi experiencia en investigación y en docencia, rescatar lo más valioso de cada una: la construcción de un conocimiento con ayuda de contenidos que ya tenemos, sin perder el énfasis en mostrar que en determinada cuenta o argumentación hay una idea que hay que institucionalizar y escribir con carácter de propiedad, para no olvidarla y poder usarla en otra oportunidad.

Seguí mi presentación comentando cómo iba a ser la materia y cuál era la modalidad de trabajo. Les expliqué que a partir de problemas representativos íbamos a ir construyendo, poco a poco, los conceptos más importantes del Álgebra Lineal y de la Geometría Analítica; que también iba a enunciar los teoremas con el objetivo de mostrar una idea importante que era necesario poner de manifiesto y que la unión de varias de esas ideas permitían la reformulación de otras. Por eso, comenté de manera enérgica que era importante para ellos poder hacer esos enlaces y esa era la parte que me importaba evaluar. Les repetí varias veces que la aprobación de la materia no pasaría por recordar fórmulas sino por lograr argumentar de manera correcta ciertas afirmaciones y poder usar las ideas vistas en clase. Cuando les dije que podían hacer un resumen con las fórmulas, más de uno se preguntó "¿Y entonces qué va a evaluar la docente?". El combo de mi formación más la posibilidad de hacer un resumen para los exámenes debió de dar la impresión de que iba a ser muy difícil aprobar.

Ese primer día de clases, como es habitual, comenté las fechas de parciales y de recuperatorios, y una fecha de trabajo práctico grupal usando la computadora. Me detuve en explicar cómo sería la aprobación de ese trabajo, que consistía en la lectura y la interpretación de un texto sobre cónicas como lugar geométrico. A partir de la lectura, se les pediría responder algunas preguntas y explicar y justificar el porqué de algunas afirmaciones del texto; además, deberían resolver determinados ejercicios argumentando correctamente. También se les pediría realizar algunas conjeturas luego de efectuar determinados cálculos con la computadora. Las consignas del trabajo práctico les parecieron extrañas. Les aclaré que estaba convencida de que era importante saber escribir correctamente las ideas, que era imprescindible evaluar ese trabajo, porque ellos en su tarea profesional futura necesitarían escribir informes y hasta vender proyectos, y para eso había que argumentar correctamente y convencer con el relato.

Uno de los estudiantes, que ya tenía experiencia anterior con esta materia en otra universidad y que había naturalizado que la matemática es difícil de entender y poco *útil para lo que él venía a buscar, no creyó mucho ese relato. Entendí su postura, ya que estaba muy acostumbrado a ver una matemática muy rígida y apartada de sus intereses. Para él, lo habitual era escuchar docentes que comenzaban sus clases con definiciones muy elegantes y abstractas, con mucha notación y luego venían los teoremas y, para ser más elegantes y más lejanos todavía, seguían con la demostración, como si por sí sola dijera algo importante. Otro alumno contó su experiencia de cursada; dijo que nunca la había podido aprobar. Cuando yo le pregunté qué había aprendido en ella, solo recordaba nombres, pero no ideas. Tuve la impresión de que los temas que había visto no habían sido significativos para él. Mi experiencia en los años de docencia e investigación me hace pensar que, si uno necesita verdaderamente algo y tiene esa necesidad por un tiempo, y de repente descubre cómo resolver una determinada situación, eso que descubrió no lo olvida más. Ahí reside el verdadero aprendizaje.*

Escuché a todos y me di cuenta de que estaba frente a estudiantes que querían aprender pero tenían miedo de que los temas fueran difíciles de entender. También había otro desafío: en ese grupo, muchos volvían a la universidad después de unos cuantos años y debía ayudar a que todos pudieran apasionarse de alguna manera con el hecho de volver a estudiar, y que esas ganas continuaran, que les quedara alguna idea de esta materia que pudiera ser reutilizada. En definitiva, intentar instalar las ganas de aprender, de superarse día a día y que el desafío de aprender no quedara en un sueño.

Es importante tener en cuenta tanto las concepciones que traen los estudiantes como las que construimos como docentes cuando preparamos las clases. Si prestamos atención a ellas, si reflexionamos sobre estos modos de posicionarse podremos mejorar nuestras clases. No podemos pasar por alto quiénes son los estudiantes que tenemos enfrente y qué necesidades tienen; tampoco podemos, por correr contra el tiempo que no alcanza, dejar de transmitir ideas con sentido, formas de pensar y argumentar que sirvan para aprender un determinado concepto.

II

Reflexiones sobre el armado de la materia

El armado de la materia disparó algunas reflexiones a la luz de las expectativas y necesidades de los estudiantes. Este es el tema de las próximas páginas, en las que también se explican con algún detalle los propósitos de la propuesta didáctica que se desarrollará en los capítulos 1 a 7, con algunas pautas generales para el trabajo. Para más información, el programa de la materia aprobado por el Consejo Superior de la universidad está incluido en el Anexo A (véase la pág. 203).

Antes de exponer esas reflexiones, se esboza la historia del Álgebra Lineal y la Geometría Analítica, y la importancia de sus contenidos para los futuros ingenieros e ingenieras.

Breve historia del Álgebra Lineal y de la Geometría Analítica

En esta sección se recorre brevemente la historia del Álgebra Lineal y de la Geometría Analítica. Para más detalle, se puede consultar Luzardo y Peña 2006.

El Álgebra Lineal es una de las ramas del Álgebra, y sus contenidos se centran en el estudio de las estructuras de los espacios vectoriales y de las transformaciones lineales. Sin embargo, su esencia pasa por el estudio de matrices y vectores. El estudio de vectores comenzó con el trabajo de W. Hamilton (1805-1865) cuando buscaba una forma de representar ciertos objetos en el plano y en el espacio, representación que llamó cuaterniones. La noción de cuaterniones condujo al desarrollo de lo que en la actualidad se llaman vectores.

Históricamente, las primeras teorías del Álgebra Lineal estaban relacionadas con la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales. A raíz de esas investigaciones surgió el concepto de determinante. W. Leibniz (1646-1716) usó los determinantes en 1693, en referencia a los sistemas de ecuaciones lineales simultáneos. Leibniz consideró sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, eliminó las incógnitas y obtuvo un determinante, al que llamó la resultante del sistema. Más adelante, L. Cauchy (1789-1857) escribió una memoria que contenía la primera demostración del teorema que afirma que el determinante de un producto de matrices cuadradas es el producto de los determinantes de dichas matrices. En 1840 demostró la propiedad de Laplace y definió la ecuación característica de la matriz A como la ecuación polinomial $\det(A - \lambda I) = 0$. Sin embargo, la utilización de la teoría de determinantes en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales fue debida a J. Sylvester (1814-1897).

Previamente, en 1750, se obtuvo la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales con el mismo número de incógnitas que ecuaciones. En 1849 se planteó el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes numéricos. Como resultado del estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y sus determinantes surgió el concepto de matriz. Fue en 1877, con la noción de rango de matriz propuesta por G. Fröbenius, cuando se consiguieron explicitar las condiciones de compatibilidad de los sistemas de ecuaciones lineales así como la determinación de estos sistemas. Por su parte, H. Grassmann (1809-1877) introdujo los conceptos de subespacio, generadores, dimensión y suma, así como las fórmulas para los cambios de coordenadas.

La construcción de la teoría general de los sistemas de ecuaciones lineales culminó a finales del siglo XIX. Fue precisamente en 1888 cuando Peano definió de manera axiomática una estructura que relacionaba toda la teoría de matrices, determinantes y el estudio de sistemas de ecuaciones: los espacios vectoriales sobre los números reales. Después, O. Töplitz (1881-1940) generalizó los principales teoremas y resultados de los espacios vectoriales reales sobre los espacios vectoriales generales en cuerpos cualesquiera, lo que dio lugar a lo que actualmente se conoce con el nombre de Álgebra Lineal y que está basada en la estructura de espacio vectorial.

Si bien en los siglos XVIII y XIX el contenido principal del Álgebra Lineal estaba constituido por los sistemas de ecuaciones lineales y la teoría de los determinantes, la posición central en el siglo XX fue ocupada por el concepto de espacio vectorial y las nociones de transformación lineal.

Sobre la importancia de la materia para los ingenieros

Para escribir estas líneas, se les pidió a varios ingenieros que indicaran para qué les sirve el Álgebra Lineal en su trabajo profesional o en su carrera académica, y la gran mayoría de ellos coincidió en la respuesta: “Para absolutamente todo”. Indagando un poco más en esta respuesta, se puede apreciar que actualmente la disciplina es uno de los temas centrales en los diseños curriculares de todas las carreras de ingeniería, y no escapan las ingeniería Eléctrica y Metalúrgica. Muchos de los problemas de estos campos requieren el uso de conceptos tales como sistemas de ecuaciones lineales, matrices, autovalores y autovectores, rectas y planos. Aplicar, por ejemplo, la multiplicación de matrices en temas relacionados al contagio de una enfermedad, el modelo insumo-producto de Leontief en temas de economía, la teoría de grafos, la aproximación por mínimos cuadrados o modelos de crecimiento de población son algunos de los ejemplos que ilustran las numerosas aplicaciones que ofrece el Álgebra Lineal en diferentes áreas de conocimiento.

Hace tan solo unos 40 años, el estudio del Álgebra Lineal estaba orientado a los estudiantes de las carreras de Matemática y Física, y a aquellos que necesitaban conocimientos, sobre todo, de la teoría de matrices. Pero es sabido que los contenidos de Álgebra Lineal y la Geometría Analítica se estudian en muchas carreras, debido al uso de las computadoras y del álgebra computacional. El Álgebra Lineal permite combinar la abstracción con la aplicación, ya que con los fundamentos teóricos se puede desarrollar no solo la habilidad de razonar matemáticamente y aplicar esos razonamientos a contextos reales sino que, a partir de esos contextos, se puede aprender los fundamentos de estas disciplinas. En ese sentido, cobra importancia el uso de las nuevas tecnologías, como las computadoras, que permiten encontrar la solución de problemas que antes eran difíciles de resolver por lo tedioso de los cálculos. Así, el uso de las computadoras de alta velocidad ha sido inmenso, sobre todo por su capacidad de resolución numérica, de cálculo rápido, de comprensión del tiempo, de modelación fiel y de representación gráfica, lo que marca tanto en la matemática como en las otras ciencias el comienzo de una nueva manera de enseñar y de aprender.

Por esta necesidad de usar las nuevas tecnologías en el aprendizaje, en las clases de Álgebra Lineal y Geometría Analítica se hace necesario emplear algún *software* de libre acceso, como Octave, Geogebra o sus equivalentes Matlab y Maple. Estos son paquetes poderosos, flexibles, amigables que permiten resolver problemas que requieren cálculos de matrices con muchas entradas, determinantes de tamaño grande, sistemas de numerosas ecuaciones lineales, autovalores y autovectores, además de que ofrecen una excelente visualización gráfica en dos y tres dimensiones. Esta visualización permite no solo comprender el significado de conceptos que se presentan abstractos, sino también, a través de la exploración, encontrar patrones de regularidad.

Sobre el uso significativo y el impacto de las computadoras, se puede citar la siguiente anécdota, incluida en el libro de D. Lay (2012):

"A finales de 1949, Wassily Leontief, profesor de Harvard, introdujo cuidadosamente la última de sus tarjetas perforadas en la computadora de la universidad, la Mark II. Las tarjetas contenían información acerca de la economía de los Estados Unidos, y representaban un resumen de más de 250.000 piezas de información producidas por la oficina encargada de las estadísticas laborales en los Estados Unidos. Leontief había dividido la economía de los Estados Unidos en 500 sectores tales como la industria del carbón, la industria automotriz, las comunicaciones, etc. Para cada sector, escribió una ecuación lineal que describía la forma en que ese sector distribuía sus salidas hacia otros sectores de la economía. Debido a que la Mark II, una de las computadoras más grandes de la época, no podía manejar el sistema resultante de 500 ecuaciones y 500 incógnitas, Leontief había condensado el problema en un sistema de 42 ecuaciones y 42 incógnitas".

Lo que se sabe es que la Mark II tardó casi 56 horas en producir un resultado. De este modo, Leontief abrió la puerta a un nuevo modo de modelar matemática en economía, a la vez que realizó uno de los primeros usos significativos de las computadoras para analizar modelos matemáticos. Debido a las masivas cantidades de datos involucrados en estos análisis, los modelos se describen mediante sistemas de ecuaciones lineales. Así se ha elevado, a medida que las computadoras se han vuelto cada vez más potentes, la importancia del Álgebra Lineal para resolver problemas de otros ámbitos.

Se enumeran aquí algunas aplicaciones del Álgebra Lineal, especialmente en el ámbito de las ingenierías. Para ampliar sobre estas aplicaciones u otras, se puede ver Kolman e Hill (2006), Lay (2012), Poole (2011) y Strang (2006).

1. Exploración petrolera: cuando un barco busca depósitos submarinos de petróleo, sus computadoras resuelven diariamente miles de sistemas de ecuaciones lineales independientes. Para algunas aplicaciones, se puede ver Akoglu y col. (2011).
2. Programación lineal: en la actualidad, muchas decisiones administrativas se toman sobre la base de modelos de programación lineal que utilizan cientos de variables. Para algunas aplicaciones se sugiere ver Castillo Ron; Conejo Navarro y Pedregal Tercero (2002).
3. Redes eléctricas: se usan programas de simulación computacional para diseñar circuitos eléctricos y microchips que incluyen millones de transistores. Estos programas emplean técnicas de Álgebra Lineal y sistemas de ecuaciones lineales. Para algunas aplicaciones se puede ver Salgado; Yuz y R. Rojas (2014).

4. Balanceo de reacciones químicas: las ecuaciones químicas describen las cantidades de sustancias consumidas y producidas por las reacciones químicas. Un método sistemático para balancear estas ecuaciones consiste en establecer una ecuación que describa el número de átomos de cada tipo presente en una reacción. Para algunas aplicaciones se puede ver Palos-Sánchez; Jaen-Márquez y Rivera-Lopez (2015).
5. Modelos económicos lineales: son los modelos de intercambio de entrada y salida desarrollados por Leontief. Se utilizan sistemas de ecuaciones lineales para describir la economía en equilibrio de un determinado país, dividido en sectores productivos. Para profundizar en este tema se puede ver Leontief (1936).
6. Flujos de redes: si se estudia el flujo de algunas cantidades a través de una red surgen los sistemas de ecuaciones lineales. Los ingenieros de tráfico monitorean, por ejemplo, el patrón de flujo del tránsito en una cuadrícula formada por las calles de una ciudad; los ingenieros eléctricos calculan el flujo de corriente que transportan los circuitos eléctricos. y los economistas analizan la distribución de productos entre fabricantes y consumidores mediante una red de mayoristas y vendedores. Para estas redes, generalmente, los sistemas de ecuaciones involucran muchísimas variables y ecuaciones lineales. En el capítulo 2 se presentan algunos ejercicios relacionados con el flujo de vehículos. Para una aplicación se puede ver Castillo Ron; Conejo Navarro y Pedregal Tercero (2002).
7. Modelos con ecuaciones lineales en diferencias: estos constituyen una poderosa herramienta matemática que permite estudiar procesos dinámicos en una amplia variedad de campos, tales como ingeniería, ecología, economía, telecomunicaciones y ciencias administrativas. Para algunas aplicaciones se puede ver Arahal; Berenguel Soria y Rodríguez Díaz (2006).
8. Aplicaciones de los gráficos por computadoras: los gráficos por computadora son imágenes desplegadas o animadas en una pantalla. Las aplicaciones de gráficos por computadora están ampliamente difundidas y su cantidad aumenta con rapidez. Una imagen (o dibujo) consta, básicamente, de varios puntos, líneas rectas o curvas conectadas, y de información a cerca de cómo llenar regiones cerradas delimitadas por esas líneas. La principal razón para describir los objetos gráficos por medio de segmentos de líneas rectas es que las transformaciones estándar en los gráficos de computadora mapean segmentos de línea sobre otros segmentos de línea. Una vez transformados los vértices que describen un objeto, se pueden conectar sus imágenes con las líneas rectas apropiadas

para producir la imagen completa del objeto original. La matemática en este caso está relacionada con transformaciones lineales y producto de matrices. Para una aplicación se puede ver Domínguez-Jiménez (2011).

9. Modelos computacionales para el diseño de aviones: el diseño de aviones comerciales y militares se basa en el modelado en tres dimensiones y la dinámica de fluidos diseñados en computadoras. Se estudia cómo se desplaza el flujo de aire alrededor de un avión virtual para probar el diseño antes de crear modelos físicos. El Álgebra Lineal ocupa un lugar destacado en este procedimiento, que ha reducido los tiempos y costos de los diseños. El proceso para encontrar el flujo de aire alrededor del avión implica la resolución repetida de un sistema que puede involucrar hasta 2 millones de ecuaciones y variables. Para una aplicación se puede ver Szabolcsi (2009).
10. Robótica: el manejo de los grados de libertad en el diseño de robots para determinadas aplicaciones cobra cada vez más importancia. Un brazo robótico consiste en una serie de vástagos de longitud fija, conectados por articulaciones donde pueden rotar. En consecuencia, cada vástago rota en el espacio o, mediante el efecto de los otros vástagos, se traslada paralelo a sí mismo, o se mueve mediante una combinación (composición) de rotaciones y traslaciones. Antes de diseñar un modelo matemático para un brazo robótico, es necesario entender cómo funcionan las rotaciones y traslaciones en composición. Para un uso del Álgebra Lineal en este campo se puede ver Archila Diaz; L. E. B. Rojas y Villamizar Morales (2011).
11. Investigación en materiales: en los últimos años se ha desarrollado una gran variedad de reómetros. Estos equipos permiten someter materiales a diversas condiciones de flujo mediante el empleo de diferentes geometrías. Es posible simular estados de deformación similares a los que se presentan en los procesos industriales. Así se puede predecir el comportamiento de los fluidos en condiciones de trabajo. Para una aplicación, se puede ver Peckar y col. (1998).
12. Aplicaciones a cadenas de Markov: las cadenas de Markov se usan como modelos matemáticos en una amplia variedad de situaciones en biología, química, ingeniería, física, negocios y otros campos. En cada caso, el modelo se usa para describir un experimento o una medición que se realiza varias veces de la misma manera, y en la que el resultado de cada ensayo del experimento es una de varias posibilidades, y el resultado de un ensayo depende solamente del ensayo inmediato anterior. El aspecto más interesante de las cadenas de Markov es

el estudio del comportamiento de una cadena a largo plazo, lo que se conoce como “predicción del futuro lejano”. Para una aplicación se puede ver Alarcón Villegas (2017).

13. Estudio de vibraciones mecánicas: se deducen las ecuaciones que describen las vibraciones en sistemas multimasa, adoptándose el método matricial de diagonalización para resolver el sistema resultante. Se puede ver una aplicación en González Filgueira y Vidal Feal (2011).

Otras aplicaciones del Álgebra Lineal:

- El uso de sistemas de ecuaciones lineales en el diseño de estructuras (ver un ejemplo de sistemas con solución única en Noble y Daniel 1969, páginas 27-30) y en el análisis de dimensión, un ejemplo de sistemas de ecuaciones lineales con un número infinito de soluciones (ver Noble y Daniel 1969, págs. 121-123; Noble 1967, págs. 234-237).
- El uso de matrices para ingeniería de comunicaciones (ver Campbell 1971, págs. 6-7) usa suma y potencias de matrices utilizadas para calcular el número de canales de información abiertos en distintos lugares, y en el diseño de estructuras (ver Noble y Daniel 1969, págs. 27-30 y 35-39 y Pipes 1950, caps. 5 y 6).
- El uso de rangos e inversas de matrices en análisis de la dimensión (ver Noble y Daniel 1969, págs. 121-123 y Noble 1967, págs. 234-237, donde se puede apreciar una aplicación del rango de una matriz que se utiliza en diversos campos de la ingeniería).
- El uso de bases ortogonales para el análisis de la respuesta de circuitos eléctricos a señales períodicas (ver Hurley 1974 y Pipes 1950, cap. 9).
- El uso de autovalores y autovectores para las direcciones principales de carga en un punto de un cuerpo elástico (ver un ejemplo en Pipes 1950, págs. 135-136). Allí, las direcciones principales son los autovectores y los autovalores son las flexibilidades.
- El uso de la diagonalización de matrices para oscilaciones de sistemas mecánicos o eléctricos conservativos, (ver Noble y Daniel 1969, págs. 310; Pipes 1950, págs. 234-271 y González y Caraballo 1954).
- El uso del concepto de biortogonalidad para el estudio de corrientes transitorias en un circuito L-C-R. Aquí se ilustra el teorema de la diagonalización bajo la condición de autovalores distintos, (ver Noble 1967, págs. 102-110).
- El uso de la forma de Jordan para la teoría de control, (ver Campbell 1971, págs. 253-254).

- El uso en problemas de elemento finito resultante de la modelización de la deformación elástica de sólidos en dos o tres dimensiones. Algunos problemas modelados con elemento finito requieren de una discretización muy fina para reducir el grado de error, lo cual implica utilizar una gran cantidad de recursos computacionales para poder ser resueltos. El tamaño de las matrices resultantes de esta modelación fina es tan grande que no es factible almacenarlas en la memoria de una sola computadora. Además, el tiempo que se tarda en encontrar la solución del sistema de ecuaciones puede ser demasiado extenso como para resultar práctico, por lo que se usan estrategias computacionales paralelas (una aplicación se puede ver en Vargas Felix 2010).
- El uso en el campo de la Teoría de la Elasticidad. En esta teoría se caracteriza el comportamiento mecánico de un sólido elástico por la acción de fuerzas en equilibrio; además, da la posibilidad de expresar la solución para el campo de las tensiones en el dominio continuo. El uso e interpretación del concepto de tensor como entidad algebraica de varias componentes, aplicado al análisis de tensiones, requiere del dominio de las operaciones con matrices. Además se utilizan sistemas de referencia cartesianos en espacios tridimensionales; (una aplicación se puede ver en Balla; Gaitán y Taborda 2011).

Sobre los contenidos de la materia

Álgebra y Geometría Analítica se cursa, como se dijo, en el segundo cuatrimestre de las ingenierías, junto con Análisis Matemático I, después de que los estudiantes cursaron el taller de Matemática e Introducción al Análisis Matemático. Estas materias aportan al Álgebra el estudio de las funciones, de las propiedades algebraicas y de los números. Y hacia adelante, los contenidos de Álgebra y Geometría Analítica brindan a las materias posteriores, como Análisis Matemático II, Física I, II y III, y Probabilidad y Estadística, la noción de vectores en el plano y en el espacio, secciones cónicas, como así también matrices y autovalores y autovectores.

En cuanto a los contenidos de la materia y su organización en clases, para quitar el excesivo formalismo e intentando hacer un curso más concreto con contenidos conectados, los temas se dividieron en tres ejes. En el primer eje, denominado *Nociones de Álgebra*, se estudian los números complejos como una extensión del cuerpo de los números reales, teniendo en cuenta las ventajas y desventajas de esa extensión. En el segundo eje, denominado *Nociones de Álgebra Lineal*, se comienza modelizando situaciones usando sistemas de ecuaciones lineales y, también, conceptos previos. A partir de la necesidad de encontrar las soluciones de estos sistemas, que son respuestas a preguntas de la vida cotidiana, se pone de manifiesto la necesidad de construir métodos sistemáticos para encontrarlas. Se estudian los tipos de soluciones de un sistema y se los relaciona con rectas y planos. Luego, se introducen las nociones de matrices y vectores como ejemplo de arreglos rectangulares especiales, y se definen las operaciones fundamentales de manera contextual, dándoles un significado. Debido a la necesidad de anticipar si un sistema tiene solución o no, se introduce la noción de determinante y se explicitan sus propiedades fundamentales. Este nuevo objeto permite anticipar, además, si una matriz cuadrada es inversible. Luego, se continúa con la noción de espacios vectoriales y subespacios, mostrando que el conjunto de matrices o de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos son ejemplos de ellos. A continuación, se estudian las transformaciones lineales como ejemplos de funciones que transforman geométricamente vectores en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ en otros vectores, por ejemplo, estas funciones rotan vectores, reflejan el plano respecto de una recta y expanden o comprimen vectores. También surge la pregunta de cuándo un vector se transforma en un múltiplo de él mismo. Por último en el tercer eje, denominado *Nociones de Geometría Analítica*, se estudian vectores en el plano y en el espacio con una mirada geométrica, y se trabaja, también, con rectas y planos, volviendo al concepto de sistemas de ecuaciones lineales desde otra mirada. Los contenidos siguen los lineamientos de los libros de Kolman e Hill (2006), Lay (2012), Poole (2011) y Strang (2006), que, a la vez, siguen las recomendaciones del grupo *Linear Algebra Curriculum Study Group.*

En el capítulo 1 de este libro se desarrollan los contenidos del primer eje del programa de la materia. Los contenidos del segundo eje abarcan los capítulos 2, 3, 4, 5 y 6, y el último eje está desarrollado en el capítulo 7.

Se incluye a continuacion el programa, con los contenidos detallados, los objetivos y la bibliografía de consulta para cada unidad.

Primer eje: Nociones de Álgebra

Unidad 1: Números complejos

Su definición. Los modos de representación de un número complejo. Forma binómica. Sus operaciones: suma, resta, multiplicación y división entre números complejos. Propiedades de las operaciones. Potencias de la unidad imaginaria. Complejos conjugados: definición y propiedades. Módulo de un número complejo y ángulo de un número complejo, su representación vectorial. Forma polar y trigonométrica de un número complejo. Potenciación y radicación en los números complejos. Fórmula de De Moivre.

Objetivos de la unidad

- Comprender las limitaciones de los números reales para encontrar raíces de polinomios con coeficientes reales.
- Reconocer los números complejos en sus distintas representaciones, comprendiendo las ventajas y desventajas de cada representación.
- Operar correctamente con los números complejos.

Bibliografía recomendada

1. Krick, Teresa, “Capítulo 6”, en *Álgebra I*, Universidad de Buenos Aires, Cursos de grado, 2017.
2. Grossman, Stanley y José J. Flores Godoy, “Apéndice B”, en *Álgebra Lineal*, séptima edición, McGraW-Hill, 2012, págs. 655-665.
3. Kolman, Bernard y David Hill, “Apéndice 1”, en *Álgebra Lineal*, octava edición, Pearson Educación, 2006, págs, 675-693.
4. Lay, David, “Apéndice B”, en *Álgebra Lineal y aplicaciones*, cuarta edición, Pearson Educación, 2012, págs. 512-516.

Segundo eje: Nociones de Álgebra Lineal

Unidad 2: Sistemas de ecuaciones lineales

Ecuaciones lineales: definición y tipos de soluciones. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Tipos de soluciones y su interpretación gráfica. Sistemas de ecuaciones lineales generales. Solución de sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas de ecuaciones equivalentes. Operaciones elementales. Métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales: eliminación de Gauss-Jordan, eliminación Gaussiana. Clasificación de sistemas lineales por su tipo de solución. Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos. Aplicaciones.

Objetivos de la unidad

- Modelizar problemas a través de sistemas de ecuaciones lineales.
- Interpretar geométricamente sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales generales mediante la eliminación Gaussiana indicando el tipo de solución que tiene dicho sistema.
- Anticipar la cantidad de soluciones que tiene un sistema de ecuaciones lineales arbitrario.

Bibliografía recomendada

1. Grossman, Stanley y José J. Flores Godoy, "Capítulo 1", ob. cit, págs. 1-45.
2. Kolman, Bernard y David Hill, "Capítulo 1" y "Capítulo 2", ob. cit., págs. 1-182.
3. Lay, David, "Capítulo 1", ob. cit., págs. 1-91.
4. Strang, G., "Capítulo 1" de *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, cuarta edición, Addison-Wesley Iberoamérica, 2007, págs. 1-69.

Unidad 3: Matrices

Definición de matriz. Vectores como un caso particular de matrices: vector fila y vector columna. Operaciones con matrices: suma, multiplicación de un escalar por matriz, producto de matrices. Propiedades: álgebra de matrices. Transpuesta de una matriz. Tipos de matrices: matrices elementales, matriz identidad, matriz nula, matrices simétricas y de permutación. Inversa de una matriz cuadrada. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales. Rango de una matriz. Teorema de Rouché-Frobenius.

Objetivos de la unidad

- Usar matrices para organizar información.
- Usar correctamente las operaciones con matrices y sus propiedades.
- Estudiar el concepto de inversa de una matriz y su importancia para anticipar, por ejemplo, si un sistema tiene solución o no.

Bibliografía recomendada

1. Grossman, Stanley y José J. Flores Godoy, "Capítulo 2", ob. cit., págs. 45-175.
2. Kolman, Bernard y David Hill, "Capítulo 1" y "Capítulo 2", ob. cit., págs. 1-182.

3. Lay, David, “Capítulo 2”, ob. cit., págs. 91-163.
4. Strang, G., “Capítulo 1”, ob. cit., págs. 1-69.

Unidad 4: Determinantes

Definición. Determinantes de orden n. Interpretación geométrica del determinante de una matriz de dos por dos. Propiedades de los determinantes. Matriz adjunta. Relación de la inversa con la función determinante. Regla de Cramer. Existencia de la solución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas vía el determinante. Aplicaciones.

Objetivos de la unidad

- Estudiar las distintas maneras de calcular la función determinante, entendiendo que todas son equivalentes.
- Calcular la función determinante de una matriz cuadrada a partir de sus propiedades.
- Aplicar el concepto de la función determinante para decidir si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución o no.
- Estudiar algunas aplicaciones geométricas del determinante.

Bibliografía recomendada

1. Grossman, Stanley y José J. Flores Godoy, “Capítulo 3”, ob. cit., págs, 175-231.
2. Kolman, Bernard y David Hill, “Capítulo 3”, ob. cit., págs. 182-214.
3. Lay, David, “Capítulo 3”, ob. cit., págs. 163-189.
4. Strang, G., “Capítulo 4”, ob. cit., págs. 201-230.

Unidad 5: Introducción a los Espacios vectoriales

Ejemplos concretos de espacios vectoriales: matrices y sistemas de ecuaciones lineales. Definición y propiedades. Subespacios. Operaciones entre subespacios. Combinación lineal, independencia lineal, base y dimensión de un espacio vectorial. Extensión a una base a partir de un conjunto linealmente independiente y extracción de una base a partir de un conjunto de generadores de un espacio vectorial.

Objetivos de la unidad

- Interpretar las operaciones suma y producto escalar de matrices como ejemplos de una estructura más general: la de espacio vectorial.
- Interpretar el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo como un subespacio, es decir, como un conjunto de vectores que es cerrado para la suma y el producto escalar.
- Estudiar con ejemplos las nociones de combinación lineal, sistemas de generadores e independencia lineal de un conjunto finito de vectores.
- Determinar las condiciones necesarias y suficientes que tiene que cumplir un conjunto de vectores determinado para formar una base de un determinado espacio vectorial.
- Entender la importancia de tener una base de un espacio vectorial.

Bibliografía recomendada

1. Grossman, Stanley y José J. Flores Godoy, "Capítulo 5", ob. cit., págs. 295-417.
2. Kolman, Bernard y David Hill, "Capítulo 6" y "Capítulo 7", ob. cit., págs. 279-390.
3. Lay, David, "Capítulo 4", ob. cit., págs. 189-265.
4. Strang, G., "Capítulo 2", ob. cit., págs. 69-141.

Unidad 6: Transformaciones lineales

Definición y ejemplos. Propiedades de una transformación lineal. Imagen y núcleo. Representación matricial de una transformación lineal. Matriz asociada a una transformación lineal. Isomorfismos e isometrías. Matriz cambio de base. Autovalores y autovectores. Polinomio característico. Aplicaciones.

Objetivos de la unidad

- Introducir las transformaciones lineales mediante la idea de transformar un vector $x \in \mathbb{R}^n$ en otro vector $b \in \mathbb{R}^m$, mediante la acción de una matriz A de tamaño $m \times n$, asociada a la transformación lineal.
- Identificar la resolución de la ecuación $Ax = b$ con las nociones de dominio, imagen, y núcleo de la transformación lineal $T(x) = Ax$.
- Interpretar movimientos en el plano como ejemplos de transformaciones lineales.

- Construir ejemplos en el plano que ayuden a comprender los conceptos de autovalores y autovectores.
- Comprender e interpretar los conceptos de autovector y autovalor.
- Construir modelos dinámicos para describir los autovalores y autovalores de una transformación lineal.

Bibliografía recomendada

1. Grossman, Stanley y José J. Flores Godoy, “Capítulo 7” y “Capítulo 8”, ob. cit., págs. 479-647.
2. Kolman, Bernard y David Hill, “Capítulo 8”, “Capítulo 9” y “Capítulo 10”, págs. 408-558.
3. Lay, David, “Capítulos 1” y “Capítulo 5”, ob. cit., págs. 62-80 y 265-329.
4. Strang, G., “Capítulo 5”, ob. cit., págs, 233-315.

Tercer eje: Nociones de Geometría Analítica

Unidad 7: Vectores en el plano y en el espacio

- Vectores en el plano. Operaciones: suma, resta entre vectores y producto de un escalar por un vector. Vector en un sistema de coordenadas, definidas por las coordenadas de su origen y extremo. Módulo. Ángulos directores. Versor asociado a un vector. Producto vectorial y mixto. Definición. Interpretación geométrica. Cálculo por coordenadas. Proyección ortogonal de un vector sobre otro. Ángulo entre vectores.
- Rectas en el plano: ecuaciones de la recta que pasa por un punto y es paralela a un vector, ecuaciones de una recta que pasa por un punto y es perpendicular a un vector. Posiciones relativas de dos rectas en el plano. Ecuaciones de la recta que pasa por dos puntos. Distancia de un punto a una recta en el plano. Intersección entre dos rectas. Aplicaciones.
- Planos en el espacio: ecuación implícita del plano. Ecuación del plano que pasa por tres puntos no alineados. Ecuación del plano que pasa por un punto y es paralelo a dos vectores no paralelos entre sí. Ecuaciones paramétrica, vectorial y cartesiana del plano. Posiciones relativas de dos planos. Ángulos diedros entre dos planos. Distancia de un punto a un plano.
- Rectas en el plano: ecuación de la recta en el espacio que pasa por un punto y es paralela a un vector. Recta definida por la intersección de dos planos no

paralelos. Posiciones relativas de rectas y planos. Distancia de punto a recta en el espacio. Posiciones relativas de dos rectas en el espacio.

Objetivos de la unidad

- Introducir el concepto de vector en el plano y el espacio, y sus operaciones.
- Entender el vínculo entre la geometría y el álgebra, el uso de las ecuaciones para modelizar objetos geométricos y estudiar sus propiedades.
- Introducir el concepto de recta y plano en el espacio desde el punto de vista vectorial.
- Describir rectas y planos mediante representaciones gráficas y ecuaciones.
- Modelizar y resolver problemas geométricos que involucran puntos, rectas y planos.

Bibliografía recomendada

1. Grossman, Stanley y José J. Flores Godoy, "Capítulo 4", ob. cit., págs. 231-295.
2. Kolman, Bernard y David Hill, "Capítulo 4" y "Capítulo 5", págs. 214-272.
3. Howard, Anton, "Capítulo 3", en *Introducción al Álgebra lineal*, Limusa, 1994, págs. 113-151.

Unidad 8: Introducción a las cónicas como lugar geométrico

Origen del nombre. Las tres cónicas: elipse, hipérbola y parábola. Definición de cada cónica a partir de una recta (directriz) y un punto fijo (foco) no perteneciente a ella. Excentricidad. Ecuación canónica correspondiente a cada cónica. Gráficos. Definición clásica de las cónicas. Equivalencia de ambas definiciones. Ecuación de segundo grado incompleta en dos variables. Propiedades.

Objetivos de la unidad

- Interpretar las distintas definiciones de cónicas como lugar geométrico, dándole un sentido a cada uno de sus elementos.
- Encontrar las ecuaciones analíticas que describen cada cónica mediante las definiciones de cónicas como lugar geométrico.
- Estudiar qué describen las intersecciones entre las cónicas.

Bibliografía recomendada

1. Kindle, J., *Geometría Analítica*, Mc Graw-Hill, Serie Shaum, 1996.
2. Gonzalez, Cecilia y Horacio Caraballo, “Capítulo 3” y “Capítulo 4”, en *Matemática básica para ingeniería agronómica e ingeniería forestal*, La Plata, Editorial de la Universidad de la Plata, 2013, págs. 31-36 y 41-52.
3. Lehmann, C., Capítulos IV a VIII, en *Geometría Analítica*, Limusa, 1986, págs. 99-210.

Nota: Esta unidad se desarrolla en forma de trabajo práctico en clase, por lo cual no se le dedica un capítulo explicativo. Ese trabajo práctico está incluido en el Anexo B “Trabajo con cónicas y Geogebra”.

Por último se presenta un posible cronograma para una cursada de la materia en un cuatrimestre dividido en 32 clases, con un total de 96 horas, repartidas en dos clases por semana.

Clase	**Unidad**	**Contenidos**
1	Números complejos	Definición de número complejo y su forma binómica. Operaciones de suma, multiplicación; propiedades. Potencias de la unidad imaginaria.
2	Números complejos	Complejo conjugado. El plano complejo y su representación gráfica. División de números complejos. Módulo y argumento. Fórmula trigonométrica de un número complejo.
3	Números complejos	Potenciación y radicación de números complejos. Fórmulas de De Moivre.
4	Sistemas de ecuaciones lineales	Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales: modelización. Presentación general. Repaso de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Continúa en la página siguiente

Viene de la página anterior

Clase	Unidad	Contenidos
5	Sistemas de ecuaciones lineales	Interpretación geométrica de los sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos o tres incógnitas.
6	Sistemas de ecuaciones lineales	Matriz de coeficientes y matriz ampliada. Pasaje de un sistema de ecuaciones a forma matricial. Resolución de ecuaciones mediante el método de eliminación de Gauss.
7	Sistemas de ecuaciones lineales	Clasificación de sistemas de ecuaciones según sus soluciones. Sistemas homogéneos.
8	Matrices y sus operaciones	Concepto de matriz. Vector como un ejemplo de matriz. Operaciones con matrices. Tipos de matrices. Transpuesta de una matriz.
9	Matrices y sus operaciones.	Propiedades de las operaciones de las matrices. Inversa de una matriz.
10	Matrices y sus operaciones	Matrices y sistemas lineales usando la matriz inversa. Rango de una matriz.
11	Matrices y sus operaciones	Teorema de Rouché-Frobenius. Ecuaciones matriciales.
12	Determinantes	Definición de determinante. Desarrollo por cofactores y aplicaciones.
13	Determinantes	Propiedades del determinante. Matriz adjunta e inversa de una matriz.
14	Determinantes	Solución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas y el determinante. Regla de Cramer. Área y Volumen.

Continúa en la página siguiente

Viene de la página anterior

Clase	Unidad	Contenidos
15		**Repaso**
16		**Primer parcial**
17	Introducción a los espacios vectoriales	Ejemplos de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. Definición y estructura. Subespacios. Combinación lineal y sistemas de generadores.
18	Introducción a los espacios vectoriales	Independencia lineal. Base y dimensión de un espacio vectorial. Rango de una matriz como cantidad de filas linealmente independientes. Bases ortonormales.
19	Transformaciones lineales	Introducción a las transformaciones lineales. Representación matricial. Núcleo e imagen, y su dimensión.
20	Transformaciones lineales	Autovalores y autovectores. La ecuación característica.
21	Transformaciones lineales	Matrices diagonales y su diagonalización. Matrices semejantes. Propiedades. Diagonalización de matrices simétricas.
22	Vectores en el plano y el espacio	Definición de vector. Operaciones con vectores de manera gráfica y analítica: suma, resta, multiplicación de un vector por un escalar.

Continúa en la página siguiente

Viene de la página anterior

Clase	**Unidad**	**Contenidos**
23	Vectores en el plano y el espacio	Módulo o norma de un vector y ángulo entre dos vectores. Producto interno y producto vectorial entre dos vectores. Propiedades.
24	Vectores en el plano y el espacio	Rectas en el plano y en el espacio y sus modos de representación. Planos en el espacio.
25	Vectores en el plano y el espacio	Paralelismo, perpendicularidad e intersección entre rectas y planos.
26	Cónicas y cuádricas, y conceptos de álgebra lineal	Trabajo con la computadora.
27	Cónicas y cuádricas, y conceptos de álgebra lineal	Trabajo con la computadora.
28		**Repaso**
29		**Segundo Parcial**
30		**Recuperatorio del segundo parcial**.
31	Cónicas y cuádricas, y conceptos de álgebra lineal	Trabajo con la computadora. Entrega del trabajo práctico.
32		**Recuperatorio del primer parcial**.

Sobre los modos de enseñar y aprender los conceptos de la materia como herramienta

Nos detenemos aquí en los propósitos de esta propuesta didáctica y algunas reflexiones metodológicas en torno a ella. Se puede indagar más en detalle en el programa completo de la materia, que se incluye en el Anexo A.

Generalmente, cuando se enseña una materia de matemática en el nivel universitario, y en especial Álgebra Lineal, se parte de una definición formal sin que medie alguna motivación previa. Así como en las materias de cálculo se puede motivar a partir de un problema físico o geométrico, por ejemplo, usar la velocidad para introducir el concepto de pendiente de una función lineal, en Álgebra Lineal, en cambio, se suele partir de la definición formal de un objeto, como los espacios vectoriales, las transformaciones lineales o los autovalores y autovectores, sin conexión con conocimientos previos ni argumentos geométricos ni físicos que motiven esa definición.

La enseñanza de esta rama de la matemática es universalmente reconocida como difícil, debido a las dificultades conceptuales y al nivel de abstracción. J. Dorier, en Dodier 2000, muestra la necesidad de los estudiantes de involucrarse a lo largo de su trabajo matemático en un análisis reflexivo de los objetos, para entender los aspectos que unifican y generalizan los conceptos.

En el año 1990, dada la problemática que se presentaba en el aprendizaje de la disciplina, se formó el *Linear Algebra Curriculum Study Group* (LACSG, por su sigla en inglés), conformado por David Carlson, Charles R. Johnson, David C. Lay y A. Duane Porter, para mejorar el currículo de Álgebra Lineal. Son ellos quienes recomiendan apartarse de la abstracción y acercarse a un curso más concreto, basado en matrices Carlson y col. 1997. En Hillel 2000 se puede encontrar una investigación en torno a los problemas del aprendizaje del Álgebra Lineal, que residen en las dificultades que tienen los estudiantes para interpretar los diferentes lenguajes que se usan para hablar de espacios vectoriales, transformaciones lineales, autovalores y autovectores sin ninguna articulación.

En la propuesta metodológica que se presenta aquí se invierte el trabajo que se da a menudo en las clases de matemática de las universidades (la secuencia definiciones, teoremas, demostraciones, ejemplos y ejercicios de aplicación) por una secuencia situaciones problemáticas o preguntas que permitan la indagación, la exploración y el armado de conjeturas, la construcción de ideas mediante definiciones o teoremas y posibles demostraciones para formalizar determinado contenido a aprender. Esta propuesta didáctica tiene como objetivo formar a los futuros ingenieros e ingenieras para que realicen su labor dentro de grupos de trabajo interrelacionados. Para ello, es importante destacar el rol de la resolución de problemas, y que esta resolución sea en grupos de trabajo, en los que se discutan las ideas y las propuestas de resolución.

Se parte de un problema modelo que permite construir un determinado concepto matemático. La propuesta es que en grupos reducidos discutan las consignas, con algunas intervenciones del docente si fuera necesario. Luego de la discusión grupal, se presentan todas las respuestas en la puesta en común, en la que se trabaja con el error propio y ajeno, y se formulan opiniones acerca de la validez de una conjetura, intentando argumentar dicha opinión. Luego, a partir de preguntas indagadoras, entre todos construyen el concepto que se quiere enseñar. Para este trabajo se usan los conocimientos previos y se pone de manifiesto la necesidad de construir un nuevo conocimiento, o bien para optimizar el trabajo, o bien para poder responder la pregunta del problema.

En cada clase se intenta relacionar la teoría y la práctica. También se intenta que el tiempo se distribuya entre explicaciones en el pizarrón, trabajos en grupos reducidos, trabajo con problemas disparadores o con algún *software* que sirva como herramienta para resolver alguna situación problemática. El disparador para explicar un determinado contenido es un problema modelo que permite, a partir del trabajo con las respuestas de los grupos, observar regularidades y construir un determinado concepto, dándole carácter de definición o de propiedad. En otras palabras: el concepto que se quiere enseñar debe ser construido entre todos a partir del problema modelo disparador. Para ello, los estudiantes usan los conceptos aprendidos en esta materia o en otras. Si es necesario, se harán nuevas preguntas o se darán nuevos problemas que permitan poner de manifiesto la propiedad que se quiere enseñar.

Para lograr esta construcción suele seguirse el siguiente orden metodológico.

- Identificar en el problema modelo los conceptos que se quieren enseñar.
- Analizar entre todos las distintas respuestas, mediante preguntas indagadoras.
- Proyectar soluciones que permitan institucionalizar el concepto aprendido.
- Institucionalizar la propiedad que se quiere poner de manifiesto, previas preguntas indagadoras o ejercicios que construyan ese concepto.

En esta propuesta es muy importante la discusión en los grupos y la puesta en común, puesto que este trabajo permite poner de manifiesto, de una manera más natural, el concepto a enseñar. El rol del docente es fundamental, ya que debe organizar el trabajo para que se pueda aprovechar al máximo el tiempo de clase. Una organización puede ser la siguiente:

- Trabajo en grupos con el problema modelo.
- Intervención del docente si un grupo no puede resolver la actividad planteada.
- Puesta en común de todas las respuestas, correctas e incorrectas.
- Debate de todas las respuestas.
- Preguntas orientadoras para indagar en lo que se quiso enseñar.
- Institucionalización de lo aprendido mediante definiciones o propiedades.
- Ejemplificación de la propiedad enseñada usando el problema modelo.

- Ejercicios para repasar lo aprendido.

Veamos, por ejemplo, el problema del capítulo 6, sección 6.1, que sirve para ejemplificar el trabajo de enseñanza y aprendizaje propuesto.

Problema modelo

1. Si se multiplica una matriz A de tamaño 2×2 por un vector X de tamaño 2×1, se obtiene otro vector $B = A\cdot X$ de tamaño 2×1.
   Para cada una de las matrices A:

   a) $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   b) $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

   c) $A := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   d) $A := \begin{pmatrix} cos(45^o) & -sen(45^o) \\ sen(45^o) & cos(45^o) \end{pmatrix}$

   - Dibujar en Geogebra el cuadrado C de vértices $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   - Realizar para cada X_i, la operación $A\cdot X_i$ con $i = 1, 2, 3, 4$.
   - ¿Qué ocurre con cualquier punto (x, y) del cuadrado C si se lo multiplica por A?
   - Dibujar el cuadrilátero $A(C)$ de vértices $A\cdot X_1$, $A\cdot X_2$, $A\cdot X_3$ y $A\cdot X_4$.
   - ¿En qué figura geométrica se transforma el cuadrado C al multiplicar cada uno de los puntos de sus segmentos y vértices por la matriz A?

2. La operación: cada vector X se transforma al multiplicar por A en el vector $A\cdot X$ puede pensarse como una función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

   $$T(X) = A\cdot X.$$

   Elegir una de las matrices del ítem anterior y resolver las consignas.

   - Probar que la función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

     $$T(x, y) = A\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

     cumple

     - $T(v + w) = T(v) + T(w)$ para cada $v, w \in \mathbb{R}^2$.
     - $T(kv) = kT(v)$ para cada $v \in \mathbb{R}^2$ y cada $k \in \mathbb{R}$.

Las funciones T que verifican los dos ítems anteriores se llaman transformaciones lineales.

Se propone que los estudiantes se reúnan en pequeños grupos y que cada grupo resuelva una matriz del punto 1. Luego, dos integrantes de cada grupo cuentan a qué conclusiones llegaron cuando realizaron los gráficos. Este primer punto permite mostrar el efecto geométrico que produce el multiplicar una matriz de tamaño 2×2 por un vector, es decir, qué interpretación geométrica se les puede dar a las transformaciones lineales. Los estudiantes pueden mostrar los gráficos realizados usando, por ejemplo, Power Point.

Estas son algunas posibles preguntas para orientar la puesta en común:

- ¿Cuáles son los valores de $A \cdot X_i$ para cada $i = 1, 2, 3, 4$?
- ¿Cómo se transforma el cuadrado C de vértices X_1, X_2, X_3, X_4 al mutiplicar todos sus puntos por la matriz A?
- ¿Qué fórmula general permite describir la transformación lineal que se produce al multiplicar por A cualquier punto (x, y) de C?

Luego, se puede invitar a los estudiantes a que tomen la matriz estudiada en cada grupo y definan la función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Después de este análisis, en los grupos ya armados los estudiantes resuelven el punto 2. Este punto permite construir las propiedades fundamentales que caracterizan una transformación lineal. Si algún grupo no puede resolverlo, el docente le propone el siguiente ejercicio:

Ejercicio 6.1.1. *Tomar los puntos X_1 y X_2 del punto 1 y demostrar que*

a) $T(X_1 + X_2) = T(X_1) + T(X_2)$

b) $T(kX_2) = kT(X_2)$, con $k = 3$.

¿El ítem a) vale para cualesquiera dos puntos que son vértice de C?¿ Valen también para cualesquiera dos puntos de $\mathbb{R}^2$? ¿Y el ítem b) solo vale para $k = 3$?

Los estudiantes pueden demostrar este punto usando que $A \cdot (X_2 + X_3) = A \cdot X_2 + A \cdot X_3$, propiedad que se puede demostrar en este caso particular, o si no, usando las operaciones definidas en $\mathbb{R}^2$, operaciones que convierten a $\mathbb{R}^2$ en un espacio vectorial real. Es importante que surjan todas las resoluciones posibles y trabajar con ellas.

A partir del trabajo con estos dos puntos del problema modelo, ya se puede definir el concepto de transformación lineal y mostrar que las funciones del punto 1 son ejemplos de ella.

Definición 6.1.2. *Sean V, W dos espacios vectoriales reales y sea $T : V \to W$ una función entre esos espacios. Es una transformación lineal si se satisface*

a) $T(v + w) = T(v) + T(w)$ para cualesquiera $v, w \in V$.

b) $T(kv) = kT(v)$ para cualesquiera $k \in \mathbb{R}$ y $v \in V$.

En esta propuesta didáctica también se incluye un trabajo con herramientas tecnológicas, como Geogebra y Octave, para mejorar no solo la comprensión de los temas, sino también, a partir de la visualización y la exploración, rescatar las ideas más relevantes, que sin el uso de estas herramientas se tornarían no solo complicadas de calcular, sino también más abstractas, lo que dificultaría la comprensión. El uso de TIC en las prácticas pedagógicas permite trabajar con ciertas habilidades matemáticas que de otro modo resultarían más difíciles, como por ejemplo la habilidad de explorar y obtener regularidades y generalizaciones, la de interpretar resultados y analizar estrategias de soluciones de problemas, y la de argumentar y ejemplificar afirmaciones. Estos son algunos problemas destinados a resolverse con la computadora.

1. *Ejercicios destinados a la resolución de cálculos matemáticos que con lápiz y papel resultan tediosos*. Se da un ejemplo que se encuentra en el capítulo 1 del Libro para el estudiante, ejercicio 1.5.2.

   Sean $z = \frac{(2+i+i^2)^2-(6-2i)^2}{i(1-i)^{10}}$ *y* $w = (1 + i)^5 + i^{85}$. *Resolver usando Octave.*

   a) *Calcular el módulo de z y el argumento de z. Observar que Octave presenta el* $\arg(z)$ *en radianes.*

   b) *Escribir el complejo z en su forma trigonométrica.*

   c) *Encontrar la parte real y la parte imaginaria del conjugado de z.*

   d) *Calcular* $z \cdot \bar{z}$ *y conjeturar observando el cálculo del módulo de z.*

   e) *Calcular* $z \cdot w$ *y* $z - w$.

   Dado $z = \frac{(2+i+i^2)^2-(6-2i)^2}{(1-i)^{10}}$, *calcular usando Octave, el módulo de z y* $z{\cdot}\overline{z}$. *A partir de estos cálculos conjeturar alguna propiedad, observando la relación entre ambos números.*

2. *Ejercicios destinados a ejemplificar determinadas propiedades.* Se da un ejemplo que se encuentra en el problema modelo referido a las propiedades de matrices, en el capítulo 3.

   Explorar con Geogebra e intentar encontrar matrices 2×2 *que cumplen*

   - $A^2 = 1$.
   - $B^2 = 0$, pero $B \neq 0$, donde 0 corresponde a la matriz nula.
   - $AB = AC$, pero $B \neq C$.

3. *Ejercicios destinados a la exploración matemática, para justificar determinada afirmación matemática.* Se da un ejemplo que se encuentra en el problema modelo referido a la inversa de una matriz y sus aplicaciones, en el capítulo 3.

   Usando Geogebra, dar ejemplos que muestren que la siguiente afirmación es falsa: Si A y B son dos matrices de tamaño 2×2 *inversibles entonces* $A + B$ *es inversible.*

4. *Ejercicios destinados a la exploración matemática para conjeturar determinada propiedad.* Se muestra un ejemplo que se encuentra en el problema modelo referido a la representación geométrica de los números complejos, incluido en el capítulo 1.

   Sean $z_1 = 1 + 3i$ *y* $z_2 = 2 + i$ *dos números complejos.*

   a) *Usando Geogebra representar ambos números en el mismo sistema de ejes cartesianos.*
   b) *Una vez graficados, sumarlos en forma analítica.*
   c) *Encontrar una manera gráfica de realizar la suma entre los complejos anteriores. Si no se encuentra, explorar con otros números complejos y llegar a una conclusión.*
   d) *Usando Geogebra, realizar una construcción que permita sumar dos números complejos cualesquiera de la forma* $z_1 = a + bi$ *y* $z_2 = c + di$*. Escribir de manera ordenada una lista de procedimientos para hacer la construcción.*

En cuanto a la demostración de los teoremas vistos, solo se trabajará en clase si esta permite o bien construir algún concepto matemático o bien trabajar con la argumentación o la escritura en matemática. La buena escritura es un reflejo de un pensamiento claro. Un pensamiento deficiente nunca podrá producir escritura coherente, por eso es importante que los estudiantes aprendan a plasmar ordenadamente en una página los pensamientos matemáticos. El siguiente ejemplo corresponde al capítulo 1 del *Libro para el estudiante* y se refiere a las propiedades de los números complejos, más precisamente, con ciertos invariantes asociados a los números complejos.

Probar las siguientes propiedades:

a) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, *para todo* $z \in \mathbb{C}$.
b) $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, *para todo* $z \in \mathbb{C}$ *distinto de cero.*

A partir de estas propiedades, ¿cómo se puede calcular la división entre dos números complejos? Es decir, dado z y w dos números complejos, ¿cómo calcular $\frac{z}{w}$*?*
Calcular $\frac{5+2i}{1-4i}$.

Las demostraciones que se piden para la primera parte del problema permiten construir la noción de inverso multiplicativo de un número complejo no nulo. A partir de esta noción, se puede inferir cómo se dividen dos números complejos. En este punto, se puede trabajar con la idea que traen los estudiantes de la escuela secundaria acerca de multiplicar y dividir por el conjugado del denominador para poder realizar dicha operación; dándole un sentido a esa técnica que se usa de manera automática.

Otro ejemplo de escritura y comprensión de un texto es el trabajo sobre cónicas como lugar geométrico que deben realizar al finalizar la cursada. Allí se propone que los estudiantes lean en grupos determinado texto sobre cónicas y respondan ciertas preguntas que orientan la lectura. Luego, con Geogebra, deben construir determinados elementos referidos a las cónicas como lugar geométrico, con la posterior construcción de las ecuaciones que las describen. Las consignas de este trabajo se encuentran en el Anexo B.

Este tipo de prácticas de escritura y de construcción de demostraciones atraviesan todo el trabajo propuesto en el *Libro para el estudiante*, desde los problemas modelo hasta los ejercicios de integración.

En resumen, las clases en esta propuesta didáctica se conciben como un lugar de estudio donde, a partir de los problemas disparadores, las preguntas orientadoras, la bibliografía y las herramientas computacionales el docente guía el aprendizaje y cada estudiante, junto con sus compañeros y compañeras, construye conocimiento. Si bien en la fase de exploración el estudiante solo se aproxima al tema y realiza una serie de conjeturas, luego, en la puesta en común, esas conjeturas se transforman en propiedades. Es tarea del docente guiar el trabajo e intervenir solo lo necesario con el fin de preservar los espacios de discusión y de participación, adaptando la clase a las necesidades que vayan surgiendo y rediseñando las actividades si es necesario para asegurar el uso eficiente del tiempo y de los recursos.

Para construir o introducir un concepto matemático no solo se usa un problema o una situación, sino también preguntas constructivas e indagadoras. Estas preguntas están dirigidas a poner de manifiesto la necesidad de construir algo nuevo usando lo viejo, y muestran que esos conocimientos anteriores son limitados. Este modo de aprendizaje, se enmarca en lo que se llama el aprendizaje por indagación, ver Meier y Rishel (1998).

Además del espacio de las clases, los estudiantes disponen de un aula virtual en el campus de la Universidad (sobre plataforma Moodle) administrada por el docente, en la que encuentran todos los materiales teóricos y prácticos, el foro de novedades, el calendario, autoevaluaciones e información de interés general. También disponen de clases de consulta o clases de tutorías fuera del horario de la cursada, en las que de un modo más personalizado pueden despejar sus dudas.

Los pasos de la propuesta didáctica para enseñar los conceptos propios de Álgebra Lineal y Geometría Analítica son los siguientes:

1. Trabajo en el aula con problemas o situaciones problemáticas disparadoras que permitan, mediante la propuesta de posibles respuestas, la aproximación a un concepto determinado.
2. Preguntas disparadoras que permitan indagar sobre los conocimientos previos, mostrando sus limitaciones, y que permitan también construir el nuevo conocimiento.
3. Trabajo en grupo en el que todos los participantes realicen sus aportes para construir el concepto que se está estudiando.
4. Puesta en común en la que se explicitan los aciertos y los errores surgidos en el trabajo grupal.
5. Trabajo con la computadora que permita la exploración y la simulación. Así, a partir de observar ciertas regularidades, se podrán elaborar conjeturas previas a la definición de una propiedad matemática.
6. Trabajo en el aula con problemas que permitan la argumentación y la escritura.

Sobre los problemas y las formas de evaluación

En esta sección se muestran los tipos de problemas que se presentan en los capítulos 1 a 7. También se incluye una breve reflexión sobre el modo de evaluar propuesto para la materia. En el Anexo C se adjuntan dos modelos de parciales.

Tipos de problemas elegidos en la materia

Pensando en que los estudiantes que cursan esta materia se están formando para ser futuros ingenieros en Metalurgia y en Energía Eléctrica, las clases se planificaron con la convicción de que es imprescindible transmitir una matemática no solo formativa sino también útil; es decir, se deben trasmitir las herramientas del Álgebra Lineal y de la Geometría en coordenadas que permitan resolver problemas concretos y, además, las ideas más importantes de los contenidos teóricos.

En la propia experiencia como estudiantes secundarios, es probable que la mayoría de docentes hayan tenido que resolver problemas matemáticos que solo involucraban numerosos cálculos. Quizá resolvían problemas descontextualizados y sin aplicaciones. Preguntar para qué servía lo que se estudiaba era algo que no se debía hacer y, si acaso se recibía una respuesta, solía ser siempre la misma, que “servía para el futuro”, sea cual fuere la idea de futuro que tenía el estudiante. Otra dificultad era que esos problemas no eran desafiantes, como si pasar por un cierto grado de frustración no fuera un paso importante para lograr adquirir algún aprendizaje. Para entender esto se puede pensar en un problema que surgió hace unos años en las familias: enseñarles a los adultos mayores a usar internet. Muchos de estos adultos mayores decían que era difícil y, además, no lo necesitaban. Pero, cuando se les mostraba que podían comunicarse al instante con familiares que vivían lejos o que podían acceder rápidamente a la información que les interesaba, comprendían que el esfuerzo de aprender valía la pena.

Esos mismos docentes, ya como estudiantes universitarios, pprobablemente hayan visto una matemática muy distinta a la de la escuela secundaria, mucho más teórica que práctica. Quizá hayan debido aprender definiciones, teoremas y largas demostraciones; la resolución de problemas aparecía luego del teorema; el teorema nunca surgía de la necesidad de resolver una situación problemática. En este tipo de experiencias se posiciona a la matemática no como una herramienta sino como un fin.

Una enseñanza de calidad de ciertos conceptos matemáticos no pasa por dar contenidos abstractos y poco útiles, sino por cómo hacer que las definiciones, teoremas, propiedades y lemas que explican algún concepto sean representativos para quien los tiene que estudiar. Para ello, el docente debe emplear prácticas pedagógicas que permitan a los estudiantes ser actores en la construcción del conocimiento. Mediante el trabajo de exploración, los estudiantes pueden encontrar ciertas regularidades que permitan conjeturar alguna situación que ocurre para determinados objetos matemáticos bajo ciertas condiciones, pero que luego, con la guía del docente, se convierten en una propiedad matemática. Para que el aprendizaje de este nuevo conocimiento matemático sea significativo, hay que mostrar la utilidad que tiene respecto de los saberes previos para resolver de manera óptima un problema planteado. Es esencial, también, que el docente dé un contexto a lo que quiere transmitir y motive al estudiante, por ejemplo, con preguntas que indaguen u organicen. Por esa razón, la elección de los problemas modelo cumple un rol destacado.

La teoría y los problemas, la práctica, tienen que ir de la mano: no se puede enseñar una matemática solo teórica, en la que los problemas sean solo aplicaciones de esa teoría. También es errado enseñar solo aplicaciones, sin profundizar en los conceptos que se quiere transmitir con dichos problemas. Si el docente aspira a darle vida a la manera de mostrar la matemática, si quiere que sea una verdadera herramienta, tiene que motivar a la clase con problemas desafiantes y generar la necesidad de aprender ideas para resolverlos.

Vale repetir que estos problemas deben ir entrelazados con preguntas que motiven y guíen el aprendizaje de un determinado concepto. Preguntas que pueden ser disparadoras o indagadoras, preguntas que ahonden en el sentido o esencia de un determinado concepto o, simplemente, que permitan reorganizar lo aprendido.

Para enseñar cada contenido de Álgebra y Geometría Analítica, se propone como disparador un problema modelo. Concretamente, se pensaron familias de problemas con determinados objetivos por cumplir a lo largo de las clases. Enumeramos algunos tipos de problemas que se encontrarán en la propuesta didáctica y ejemplos de cada tipo.

1. Problemas que permiten modelizar en matemática.
2. Problemas que permiten introducir determinado concepto teórico.
3. Problemas que permiten trabajar con una demostración matemática.
4. Problemas que permiten aplicar cierto concepto algebraico o geométrico.
5. Problemas que permiten explorar en matemática para encontrar regularidades.
6. Problemas que permiten analizar determinada afirmación matemática.

Los siguientes ejemplos corresponden a problemas que permiten la modelización en matemática. Sus objetivos son formular una situación real en términos matemáticos; resolverlos, si es posible, con las herramientas matemáticas que se conocen e interpretar los resultados en términos del problema y de la situación estudiada. Existen distintas fases en la modelización matemática: el estudio de la situación real, la elaboración, la solución del modelo y su validación.

Este problema se encuentra en el capítulo 2, sección 2.1, Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales.

Problema modelo, parte 2. *Laura compró un abrigo que estaba rebajado un* 15 %. *Irene eligió uno que era* 250 *pesos más caro que el de Laura, pero consiguió una rebaja del* 20 %, *por lo que solo pagó* 80 *pesos más que Laura. ¿Cuál era el precio de cada abrigo?*

Los estudiantes deben averiguar cuál era el precio de cada abrigo sin las rebajas. Pueden resolver el problema sin necesidad de modelizarlo a partir de sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, la modelización del problema a partir de ecuaciones lineales permite responder de manera óptima.

El docente puede pedirles a los grupos que planteen un sistema de ecuaciones lineales que modelice la situación y que identifiquen cuáles son las incógnitas del problema. Si surgen los precios sin necesidad de las ecuaciones lineales, se puede preguntar cuál es el precio de cada abrigo si el problema es el siguiente:

Laura ha comprado un abrigo que estaba rebajado el 15 %. *Irene ha comprado otro abrigo A pesos más caro, pero ha conseguido una rebaja del* 20 %, *con lo que solo ha pagado B pesos más que Laura. ¿Cuál era el precio de cada abrigo?*

Algunas dificultades que pueden aparecer es que los estudiantes no recuerden cómo calcular el 15 % de un determinado precio ni cómo calcular el nuevo valor. Esto hará necesario un trabajo previo al planteado.

Una estrategia metodológica para emplear si los alumnos tienen dificultades con la modelización del problema a partir de ecuaciones lineales es leer en voz alta las oraciones del enunciado y preguntar cómo se puede escribir la información en lenguaje simbólico, cuáles son las incógnitas del problema y qué ecuaciones lineales se pueden deducir a partir de la lectura del enunciado.

El sistema (A) por modelizar es el siguiente:

$$\begin{cases} y = 250 + x \\ \frac{80}{100}y = \frac{85}{100}x + 80 \end{cases}$$

Una vez encontrado el sistema de ecuaciones lineales, se buscan las maneras de resolverlo. El docente puede realizar las siguientes preguntas:

- ¿Qué significa encontrar una solución del sistema de ecuaciones?
- ¿Por qué, efectivamente, es una solución del sistema de ecuaciones lineales?

- ¿Cómo encontrar esa solución?

Pueden surgir varias técnicas para encontrar la solución del sistema (A). Algunas pueden llevarlos a un sistema equivalente. Si no surge otro sistema equivalente, se puede preguntar qué sucede si se multiplica la segunda ecuación de (A) por $\frac{100}{80}$.

Es una buena idea trabajar con todas las maneras equivalentes de reescribir el sistema (A), preguntando cuál es la solución del sistema de ecuaciones lineales equivalente planteado. En este caso la solución del sistema es $(2400, 2650)$, es decir, el abrigo de Laura sin rebaja cuesta 2400 pesos y el de Irene, 2650 pesos. Para reforzar la idea de sistema equivalente y solución de un sistema de ecuaciones lineales, se puede pedir que respondan si la solución encontrada es solución de ambos sistemas.

Luego, ya están en condiciones de definir el concepto de sistemas de ecuaciones lineales, incógnitas y solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Otro ejemplo de modelización matemática es el problema de los cursos de inglés que se encuentra en el capítulo 3, en la sección 3.1.

Problema modelo, ítem 2. *En un instituto se dan los cursos de Inglés 1, Inglés 2 e Inglés 3. La siguiente tabla muestra la cantidad de horas de clase, tutorías y guardias que se deben cumplir semanalmente por profesor según el nivel de Inglés:*

Materia	Horas de clase	Horas de guardia	Horas de tutoría
Inglés 1	20	5	3
Inglés 2	18	6	5
Inglés 3	22	1	3

Además se sabe que el instituto paga 12 dólares cada hora de clase, 3 dólares cada hora de guardia y 6 dólares cada hora de tutoría.

a) *¿Cuánto le cuesta al Instituto la enseñanza semanal de cada curso por profesor?*

b) *El instituto dispone de 5 profesores para Inglés 1, 4 profesores para Inglés 2 y 6 profesores para inglés 3. ¿Cuáles son los números totales de clases, guardias y de tutorías?*

c) *¿Cuánto le cuesta al instituto en total, semanalmente, enseñar los tres niveles de Inglés?*

El objetivo de este problema es mostrar la optimalidad de usar la multiplicación de matrices para contestar ciertas preguntas.

Estas preguntas pueden responderse sin necesidad de que los estudiantes escriban matrices o tablas; sin embargo, se puede plantear el hecho de que escribir la información en tablas permite organizarla y obtener, a partir de operaciones entre ellas, respuestas de manera óptima y rápida cuando los datos involucrados son muchos. Este problema es un buen ejercicio para introducir la multiplicación de matrices en contexto.

Una vez que los estudiantes hayan respondido las preguntas, se introduce la multiplicación de matrices. Por ejemplo, para saber cuánto le cuesta al instituto enseñar cada nivel de Inglés por profesor, los estudiantes resolverán las siguientes cuentas: $20 \cdot 12 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 273$. Así, al instituto le cuesta 273 dólares por profesor enseñar Inglés 1 durante una semana.

De la misma manera, si quieren averiguar cuánto cuesta enseñar Inglés 2, harán: $18 \cdot 12 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot 6 = 264$. Por lo tanto, al instituto le cuesta 264 dólares enseñar Inglés 2.

Y por último, al instituto le cuesta $22 \cdot 12 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 285$ dólares enseñar Inglés 3 por profesor, por semana.

Una posible actividad para introducir las matrices es que imaginen que los niveles de Inglés son 50 y, tienen que responder la misma pregunta. El docente, entonces, indaga si se les ocurre una manera más rápida de hacer estas cuentas sin perderse ni repetir resultados.

A continuación se introduce la escritura de matrices. En el problema hay tres:

- La matriz M, de tamaño 3×3, que indica las horas de clase, de guardia y de tutorías para cada uno de los tres niveles de Inglés por profesor.
- La matriz C, de tamaño 3×1, que indica lo que paga el instituto por cada hora de clase, de guardia y de tutoría. Más precisamente, $C := \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.
- La matriz P, de tamaño 1×3, que indica la cantidad de profesores asignados para cada uno de los niveles de Inglés. Más precisamente, $P := \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Los estudiantes, mirando sus cuentas y lo que se pide, deberían llegar a la conclusión de que necesitan la información de las matrices M y C. El docente, en este punto, puede explicar cómo se multiplican las matrices y el orden para multiplicar sus elementos.

En principio, hay dos maneras de multiplicar: o bien $M \cdot C$ o bien $C \cdot M$. La segunda manera no tiene sentido, ya que C es de 3×1 y M es de 3×3. Matemáticamente, entonces, tiene sentido multiplicar $M \cdot C$, y representa una matriz de tamaño 3×1. Pero en el contexto del problema, ¿qué significa multiplicarlas? ¿Cómo multiplicarlas?

Por ejemplo, la fila 1 de M indica las horas de clases, de guardias y de tutorías de Inglés 1 y C indica lo que se paga cada hora de clase, de guardia y de tutoría, respectivamente. Por lo tanto tiene sentido multiplicar la fila 1 de M por la última columna de C, es decir:

$$\begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 20 \cdot 12 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 273.$$

Este número expresa que al instituto le cuesta 273 dólares enseñar Inglés 1, de acuerdo con la cantidad de horas de clase, de guardia y de tutoría que asigna.

De la misma manera, si se multiplica la fila 2 de la matriz M por C, se obtiene lo que cuesta enseñar Inglés 2. es decir:

$$\begin{pmatrix} 18 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 18 \cdot 12 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot 6 = 264.$$

Por último, si se multiplica la fila 3 de M por C, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 22 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 22 \cdot 12 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 285.$$

Este número indica que enseñar Inglés 3 le cuesta al instituto 285 dólares. Así, la información de lo que le cuesta enseñar cada nivel de Inglés se puede resumir en la siguiente matriz:

$$M \cdot C = \begin{pmatrix} 273 \\ 264 \\ 285 \end{pmatrix}.$$

Para concluir, se les pide a los estudiantes que hagan un trabajo similar con las restantes preguntas del problema.

Otra familia de problemas que pueden encontrar en los ejercicios propuestos, permiten introducir determinados conceptos teóricos. Por ejemplo, el siguiente problema se encuentra en el capítulo 5, sección 5.2.

Problema modelo, ítem 1. *Una compañía fabrica dos productos. Por cada dólar obtenido del producto B, la compañía gasta* $0,45$ *dólares en materiales,* $0,25$ *dólares en mano de obra y* $0,15$ *dólares en gastos generales. Por cada dólar obtenido del producto*

C, la compañía gasta 0,40 *dólares en materiales,* 0,30 *dólares en mano de obra y* 0,15 *dólares en gastos generales.*

$$B := \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,25 \\ 0,15 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 0,40 \\ 0,30 \\ 0,15 \end{pmatrix}$$

B, C representan los costos por dólar de los productos.

a) *¿Qué interpretación económica puede darse al vector $100B$?*

b) *La compañía desea fabricar x_1 dólares del producto B y x_2 dólares del producto C. Proporcionar un vector que describa los diversos costos que tendrá por materiales, mano de obra y gastos generales.*

Este es un problema en contexto que permite introducir el concepto de combinación lineal entre vectores. Los estudiantes, reunidos en grupos reducidos, no deberían tener dificultades para resolver las consignas, ya que el problema está relacionado con sistemas de ecuaciones lineales.

Antes de empezar, se vale recordar la noción de costo: el costo total está relacionado con la suma de la cantidad de unidades de un producto por lo que sale cada unidad.

En la puesta en común, las preguntas ayudan a definir la noción de combinación lineal. Algunas posibles son:

- ¿Cómo se puede representar el costo total de la empresa si se quiere fabricar 1000 dólares del producto B y 2000 dólares del producto C? ¿Cuál es el costo?
- ¿Y si se quiere representar el costo total de la empresa si fabrica x_1 dólares del producto B y x_2 dólares del producto C?

A partir de este trabajo, se pone por escrito que el costo total de la empresa queda determinado por el vector

$$x_1B + x_2C, \quad B := \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,25 \\ 0,15 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 0,40 \\ 0,30 \\ 0,15 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, se puede definir el concepto de combinación lineal entre vectores.

Otro problema para introducir un concepto teórico a partir de la resolución del problema planteado pertenece al capítulo 4, sección 4.1.

Problema modelo, ítem 1. *Sea el sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- *¿Qué condiciones tienen que cumplir $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ para que el sistema tenga solución única?*
- *Proponer una matriz que haga que el sistema tenga solución única, y una matriz que haga que el sistema no tenga solución.*

Este problema permite introducir el concepto de determinante de una matriz cuadrada de tamaño 2×2. Luego del trabajo en los grupos, se debe hacer una puesta en común con las respuestas surgidas. Algunos estudiantes pueden intentar triangular la matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales y encontrar condiciones para que esto ocurra. Otra posibilidad es que relacionen la existencia de solución única del sistema de ecuaciones lineales con la de la inversibilidad de la matriz de coeficientes. Para decidir si dicha matriz es inversible, deben encontrar condiciones para los valores de a, b, c, d. Por último, pueden usar Geogebra y calcular la inversa de la matriz de coeficientes y ver las condiciones que se necesitan para obtener la inversa de dicha matriz.

La condición que se necesita para triangular la matriz ampliada asociada al sistema o encontrar la inversa de la matriz de coeficientes es que los valores a, b, c, d cumplan que $ad - bc \neq 0$.

Luego habría que proponer a los estudiantes que encuentren matrices de coeficientes $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que hagan que el sistema tenga solución única y matrices A que hagan que no tengan solución única.

Para cerrar esta actividad, formalizar la siguiente propiedad:

Proposición 4.1.1. *Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Un sistema de ecuaciones lineales*

$$A \cdot X = B$$

tiene solución única si y solo si A es inversible, si y solo si $ad - bc \neq 0$.

A partir de esta propiedad, se puede dar un nombre al número encontrado $ad - bc$, y dar la siguiente definición.

Definición 4.1.2. *Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Se define el determinante de A como $\det(A) = ad - bc$.*

Otra familia de problemas que se incluye en la propuesta didáctica permite trabajar con la demostración en matemática. El siguiente problema pertenece al capítulo 7, sección 7.2.

Problema modelo, ítem 1. *Sea $v = (1, 2)$ un vector en el plano.*

a) *¿Cuánto vale $||v||$?*
b) *Calcular $w = \frac{v}{||v||}$ ¿Qué norma tiene?*
c) *Dado $v = (a, b)$ ¿Qué norma tiene el vector $w = \frac{v}{||v||}$?*
d) *¿Qué propiedad se puede dar a partir de los cálculos realizados?*

Con este problema se construye, sobre la base de una demostración sencilla, cómo obtener vectores de norma 1 a partir de un vector dado. La propuesta es empezar con un ejemplo particular: dado el vector $v = (1, 2)$, se pregunta qué norma tiene y cómo se puede encontrar un vector en la misma dirección que v, pero que tenga norma 1. Luego se les propone encontrar, dado un vector $v = (a, b)$ cualquiera, otro vector de norma 1 en la misma dirección que v. Finalmente, se les pide a los estudiantes que averigüen cuántos vectores de norma 1 es posible encontrar que tengan la misma dirección que el vector v.

Otro ejemplo es el correspondiente al capítulo 1, sección 1.4, referido a invariantes asociados a los números complejos.

Problema modelo, ítem 2. *Probar las siguientes propiedades:*

a) *$z \cdot \overline{z} = |z|^2$, para todo $z \in \mathbb{C}$.*
b) *$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, para todo $z \in \mathbb{C}$ distinto de cero.*

A partir de estar propiedades, ¿cómo se puede calcular la división entre dos números complejos? Es decir, dado z y w dos números complejos, ¿cómo calcular $\frac{z}{w}$? Calcular $\frac{5+2i}{1-4i}$.

Sobre la base de la demostración pedida es posible construir la noción de división de números complejos. Los estudiantes ya vieron este concepto en la escuela secundaria, pero aquí se le da una explicación a la noción de multiplicar y dividir por el conjugado del número complejo que se encuentra en el denominador. Entonces, a partir de la demostración de una propiedad, se construye un nuevo concepto: la división de números complejos, y se le da un sentido a la división que se hacía en la escuela secundaria.

En la propuesta didáctica se incluye una familia de problemas para aplicar determinado concepto algebraico o geométrico. Un ejemplo de ello es el problema que se encuentra en el capítulo 7, sección 7.5, referido a paralelismo, perpendicularidad e intersección de rectas y planos.

Problema modelo, ítem 1. *Sean* $L_1 : (x, y, z) = (-1, 3, 1) + \alpha(4, 1, 0)$ *y* $L_2 : (x, y, z) = (-1, 2, 1) + \beta(12, 6, 3)$ *dos rectas en el espacio. ¿Se intersecan estas dos rectas? Si lo hacen, ¿en qué punto? Un soporte gráfico puede servir como guía.*

Este problema permite estudiar cuándo dos rectas escritas en forma vectorial se intersecan, y si lo hacen, en qué punto. Para este trabajo es útil usar Geogebra, herramienta que permite conjeturar a partir de la visualización de los gráficos, determinada propiedad. Con la información de los vectores directores de las rectas L_1 y L_2 se determina si las rectas son paralelas, perpendiculares o se intersecan.

Por último, el problema modelo que se encuentra en el capítulo 3, sección 3.2, referido a propiedades de la matrices, sirve para aplicar el concepto de multiplicación de matrices sin tener que hacer todas las multiplicaciones entre sus elementos.

Problema modelo, ítem 2. *Sean las matrices* $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ *y* $B := \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Encontrar la segunda columna de AB y la primera fila de AB sin hacer todas las multiplicaciones para hallar AB.*

Otra familia de problemas está referida a problemas que permiten la exploración matemática para encontrar regularidades. A continuación se citan dos ejemplos. El primero es el que se encuentra en el capítulo 1, sección 1.3.

Problema modelo, parte 2. *Sea el número complejo* $z = 1 + i$.

a) *Graficar dicho número en Geogebra.*
b) *Multiplicar z por* $k \in \mathbb{R}$. *Usando Geogebra, ¿qué sucede con la gráfica de z al multiplicarlo por k?*
c) *Multiplicar z por potencias de i. Usando Geogebra ¿qué sucede con la gráfica de z al realizar dicha multiplicación?*
d) *Multiplicar z por el complejo* $w = ki$ *con* $k \in \mathbb{R}$. *Usando Geogebra, ¿qué sucede con la gráfica de z al multiplicarlo por w?*
e) *Al realizar la última multiplicación representada en el plano complejo, ¿de qué manera se puede relacionarla con las gráficas de las multiplicaciones realizadas en las actividades anteriores?*

Mediante la exploración con Geogebra se logra estudiar cuál es la interpretación geométrica que se le da a la multiplicación de dos números complejos. Este problema introduce el Teorema de De Moivre, en el que se relacionan los argumentos de los dos complejos que se quieren multiplicar con la suma de ambos.

Otro problema es el que se encuentra en el capítulo 2, sección 2.2.

Problema modelo, ítem 2. *Dado el sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ dx + ey = 3 \end{cases}$$

a) *Crear deslizadores para los coeficientes a, b, c y d del sistema de ecuaciones lineales.*

b) *A partir de la exploración, contestar:*

- *Si el sistema tiene solución, ¿cuántas soluciones tiene? Gráficamente, ¿cuándo sucede esto?*
- *Si el sistema tiene solución, ¿puede tener solo dos soluciones? ¿Por qué?*
- *¿El sistema puede no tener solución? Gráficamente, ¿cuándo puede suceder esto?*

c) *A partir de todo lo trabajado, sacar conclusiones.*

Nuevamente, mediante la exploración con Geogebra se logra dar una interpretación geométrica a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, estudiar cuáles son las distintas posiciones entre dos rectas en el plano y cuál es su vinculación con la cantidad de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

Por último, se incluye una familia de problemas destinada a la argumentación en matemática. El siguiente ejercicio es útil para justificar, a partir de ejemplos, que una afirmación matemática es falsa. Este problema pertenece al capítulo 3, sección 3.3 .

Problema modelo, ítem 5. *Usando Geogebra, dar ejemplos que muestren que la siguiente afirmación es falsa: Si A y B son dos matrices de tamaño 2×2 inversibles, entonces $A + B$ es inversible.*

Antes de que los estudiantes se reúnan en grupos, se propone hacer un trabajo de interpretación de cuándo una determinada afirmación matemática es falsa. Para ello, sirve plantear un ejercicio con distintas afirmaciones sencillas y preguntar cuándo son verdaderas y cuándo son falsas. Se incluye un ejemplo.

Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar las decisiones.

1. *Todo número entero par elevado al cuadrado es par.*
2. *Todo número real elevado al cuadrado es positivo.*

Luego, el docente propone que busquen matrices A y B que permitan determinar que la afirmación del problema es falsa. Puede interrogarlos acerca de qué tiene que ocurrir con dichas matrices para justificar que la afirmación es falsa.

Por último, se presenta el problema modelo del capítulo 5, sección 5.1, referido al concepto de espacio vectorial y subespacio.

Problema modelo, ítem 8. *Decidir si los siguientes conjuntos forman un subespacio.*

a) S_1 el conjunto formado por (x, y) tales que $x \geq 0$.

b) S_2 el conjunto formado por (x, y) tales que $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

c) S_3 el conjunto formado por todos los $(0, y)$ tales que $y \in \mathbb{R}$.

d) S_4 el conjuunto formado por todos los (x, y) tales que $x + y = 0$.

Con este problema, y a partir de la definición de subespacio, se quiere determinar si un conjunto es efectivamente un subespacio o no.

Modos de evaluación

En esta propuesta didáctica, la evaluación es un proceso continuo y permanente que se realiza con el propósito de diagnosticar y controlar los progresos y resultados en el desempeño de los estudiantes, permite valorar sus logros y detectar insuficiencias frente a los objetivos propuestos (ver en el programa de la materia que se encuentra en el anexo, Anexo A), para así buscar soluciones que fortalezcan, orienten y reorienten el aprendizaje. En otras palabras, la evaluación no es una consecuencia sino parte del proceso de aprendizaje.

Para secuenciar este proceso, se pensaron tres instancias explícitas de evaluación (ver modelos en el Anexo C):

1. Un primer parcial escrito que abarca números complejos, sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes.
2. Un segundo parcial escrito que abarca los conceptos de espacios vectoriales, transformaciones lineales, autovalores y autovectores, vectores, rectas y planos.
3. Un trabajo práctico grupal sobre cónicas como lugar geométrico, que corresponde a la unidad 8, en el que se trabaja con la lectura de un material y con preguntas y problemas aplicados que permiten la reflexión, la interpretación, la argumentación y la correcta escritura en matemática (ver Anexo B).

Además de obtener una nota numérica, se recomienda retomar los parciales y el trabajo grupal para poner de manifiesto cuáles fueron los errores y los aciertos, y también para compartir y discutir las distintas maneras en que fueron escritas las ideas y los modos de resolución de los ejercicios propuestos.

Como el proceso de evaluación es continuo, durante la cursada se programa también la entrega por parte de los estudiantes de ejercicios resueltos de las guías prácticas. Con este tipo de actividades se detectan tempranamente diferentes errores, además de observar si van entendiendo los conceptos y pueden ordenar las ideas para presentar una adecuada argumentación.

También se trabaja con breves exposiciones orales sobre las producciones realizadas tanto en el trabajo práctico como en las entregas de los ejercicios. Esta es una excelente actividad para que los estudiantes produzcan textos explicativos coherentes y que sus compañeros formulen preguntas y reflexionen sobre la exposición.

Un simulacro antes de cada parcial escrito da pie para entrenar con consignas de tipo parcial en un tiempo determinado: ejercicios argumentativos, pequeñas demostraciones, resolución de ejercicios para contestar determinada pregunta. Luego, al hacer una puesta en común con las diferentes resoluciones y argumentaciones se repasan los conceptos e ideas que se van a evaluar.

Algunos de los aspectos que se evalúan son:

- La escritura correcta de determinada afirmación o justificación.
- El orden y claridad en las exposiciones, escritas y orales.
- El compromiso con las producciones y el análisis crítico de las producciones de otros.
- El cumplimiento de los trabajos prácticos y entrega a tiempo de ejercicios.
- La participación activa en las clases.
- El procedimiento ordenado y correcto del desarrollo de ejercicios y problemas planteados.
- La correcta interpretación de consignas y de textos matemáticos aplicados.
- La correcta justificación, usando los conceptos vistos, de determinada afirmación o pregunta matemática.
- La clara y correcta expresión de las ideas.
- La interrelación de los conocimientos dados en la materia, integrando con conceptos vistos en otras materias.

En cuanto al tipo de ejercicios, en los exámenes escritos el fin no es evaluar simples ejercicios algorítmicos, sino que en ellos lo algorítmico sea una herramienta para resolverlos, que permita o bien contestar preguntas o bien argumentar una idea matemática. La evaluación incluirá, entonces, ejercicios que para argumentar, justificar y escribir en matemática. El énfasis está puesto en las ideas y no en los procedimientos mecánicos.

Los siguiente ejemplos son ejercicio de los modelos de parciales incluidos en el Anexo C.

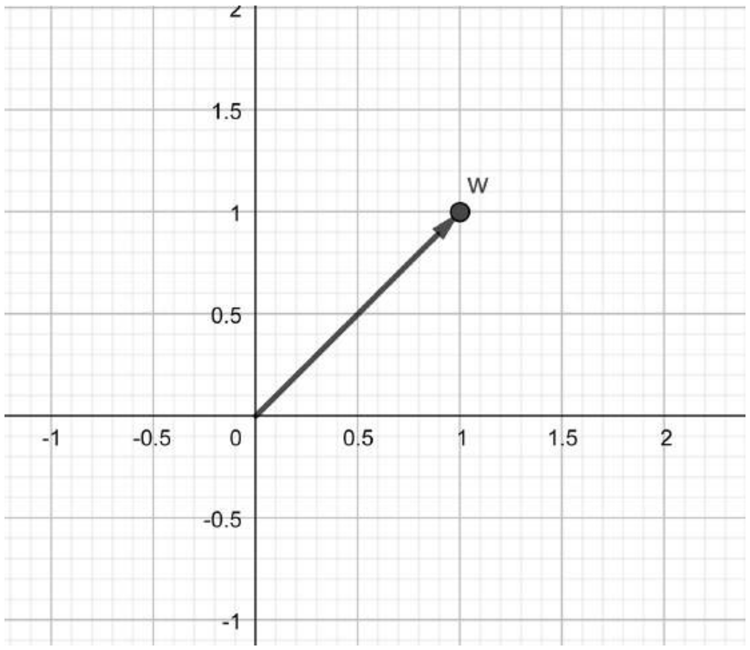
Primer parcial. Ejercicio 1

Este ejercicio corresponde al tema números complejos del primer parcial.

a) Indicar por qué la siguiente afirmación es verdadera en los números complejos, pero es falsa en los números reales:

$$(1-\sqrt{-3})(1+\sqrt{-3}) = 1-(-3) = 4.$$

b) Sea $z = \sqrt{2}(cos(\frac{2\pi}{8}) + isen(\frac{2\pi}{8}))$ y sea w el número complejo representado en el plano complejo.



Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar las decisiones.

a) z y w tienen los mismos módulos pero distintos argumentos.

b) z y w son iguales escritos en distintas representaciones.
c) z y w tienen los mismos argumentos pero distintos módulos.
d) z y w son iguales porque tienen los mismos argumentos y los mismos módulos.

Segundo parcial. Ejercicio 3

Este ejercicio corresponde al modelo del segundo parcial, referido a espacios vectoriales: la noción de vectores linealmente independientes o no.

Sea el sistema de ecuaciones lineales $A \cdot X = 0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Encontrar dos vectores linealmente dependientes que sean solución del sistema de ecuaciones lineales.
b) Encontrar dos vectores linealmente independientes que sean solución del sistema.
c) ¿Es posible encontrar tres vectores linealmente independientes que sean solución del sistema? ¿Por qué?

Segundo parcial. Ejercicio 4

Este ejercicio corresponde al segundo parcial, referido a las transformaciones lineales entre espacios vectoriales.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por $T(x,y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Dibujar el cuadrado de vértices $v_1 = (0,0)$, $v_2 = (1,0)$, $v_3 = (1,1)$ y $v_4 = (0,1)$.
b) ¿Qué cuadrilátero se forma con los vértices $T(v_1)$, $T(v_2)$, $T(v_3)$ y $T(v_4)$?
c) ¿Se puede decir que T es una transformación lineal? Si tu respuesta es afirmativa, dar una justificación.
d) ¿Quiénes son los autovalores y autovectores asociados a A?

En el ejercicio 1 del primer parcial, los estudiantes, usando los conceptos vistos de números complejos, tienen que justificar si una afirmación es verdadera o falsa. Por un lado, en el ítem a) se evalúa si el estudiante puede justificar por qué la cuenta realizada es cierta en los números complejos pero es falsa si se opera en los números reales. En el punto b) de este ejercicio los alumnos usan las distintas representaciones de un número complejo para determinar si una afirmación es verdadera o falsa.

En el ejercicio 3 del segundo parcial, deberán usar el proceso algorítmico para decidir si ciertas soluciones de un sistema homogéneo son linealmente dependientes.

En el ejercicio 4 de ese segundo parcial, los estudiantes tienen que usar la definición de transformación lineal para decidir si la función descripta lo es. Además, este ejercicio permite observar cuál es la transformación que se produce en los vectores al aplicarles la función T. Por último, pide encontrar los autovalores y autovectores de dicha transformación lineal. En este punto, los estudiantes no tienen que calcularlas, ya que en el primer ítem de este ejercicio se encuentran los autovalores y autovectores pedidos. Así, los estudiantes deberían poder interpretar el significado de estas definiciones e identificarlos, sin necesidad de usar el cálculo algorítmico.

Para resumir, las preguntas de las evaluaciones no están enfocadas a evaluar un manejo algorítmico y mecánico de los conceptos vistos sino, más bien, llevan al estudiante a proponer, relacionar conceptos y usar las propiedades creativamente para alcanzar la solución requerida. La evaluación es parte del proceso del aprendizaje y de la construcción de un determinado conocimiento, por lo que este tipo de tarea acerca a los futuros profesionales a su campo laboral. Cuando se arman las evaluaciones, en cualquiera de las instancias, hay que tener en mente las preguntas ¿por qué evaluar?, ¿qué evaluar? y ¿cómo evaluar en las clases?

III

Conclusiones

En este apartado se exponen algunas conclusiones acerca de esta propuesta de trabajo con futuros ingenieros e ingenieras. En la primera sección se presentan los resultados de una encuesta realizada a los estudiantes luego de finalizado el curso.

Una mirada de los alumnos sobre el proceso de enseñanza–aprendizaje

La manera de enseñar matemática, de actuar como docentes dentro del aula, está apoyada en una serie de supuestos acerca de lo que debe ocurrir en las clases, por ejemplo, qué saben o qué no saben los alumnos al comienzo de la cursada, cuáles son los métodos más eficaces para aprender un determinado tema, qué preguntas van a hacerles, cuáles no harán, cómo intervenir frente a determinada situación, cuál es el ritmo de trabajo más adecuado para que los alumnos asimilen determinado contenido. Una vez planificado el curso de acuerdo con esos supuestos, se pone en marcha esa máquina imaginaria, y muy pocas veces hay desvíos del camino trazado al principio. Es más, generalmente, se acelera lo planificado al inicio.

Y esa posición de correr contra el tiempo es contraria a la del trabajo del investigador, ya que en ese rol las preguntas son: cómo son las cosas, por qué son así y si no podrían ser de otra manera.

Para mejorar el trabajo, entonces, es importante pensar acerca del rol docente en las clases y lo que ocurre en cada una ya que, aunque la materia se dicte reiteradamente, cada vez es distinta. Por ello, para hacer una reflexión profunda que permita cambiar algunas maneras de dar determinado contenido es necesario escuchar a los alumnos. Reunir datos de cómo se desarrollan los procesos de enseñanza–aprendizaje es el primer paso para mejorar la práctica.

Si se espera que las clases sean cada vez más ricas, dinámicas y permitan aprender verdaderamente ideas detrás de conceptos abstractos, es necesario que los docentes se hagan las mismas preguntas que se realizan cuando trabajan como investigadores, es importante trasmitir de alguna manera el sentido de los conceptos, por qué aprenderlos y para qué se usan, intentar generar en los alumnos las preguntas que motiven la necesidad de adquirir ese nuevo conocimiento. De alguna manera, habría que pensar la clase como un laboratorio en el que se desarrolla cierto proceso de enseñanza–aprendizaje y en la que el docente es el testigo privilegiado.

Un instrumento que permite recabar alguna información acerca de la práctica docente es la encuesta a los estudiantes. Cabe aclarar que se puede tener alguna visión de la labor como docentes con las evaluaciones, pero esa información es limitada, ya que en ellas se hacen preguntas sobre los contenidos de la materia pero no la opinión sobre esos contenidos o sobre el desempeño del docente. Además, están condicionadas porque los estudiantes están buscando aprobar la cursada.

En esa dirección se elaboró una encuesta para tener información sobre la aceptación de los estudiantes ante la propuesta presentada en los capítulos 1 a 7. Más precisamente, se recabó información relevante sobre el trabajo de la docente: sobre sus exposiciones, su interacción con el grupo y el trato individual. También, sobre la materia propiamente dicha: el contenido, las prácticas, la clase de problemas, la organización del curso, la evaluación de la asignatura, la bibliografía recomendada y el material usado.

Las preguntas en esta encuesta se redactaron en forma de afirmación para señalar el grado de acuerdo con cada una, desde "muy en desacuerdo" a "muy de acuerdo". En la encuesta también hay preguntas abiertas para opinar acerca de algún ítem, opinión que permite pensar cómo se dan las clases, para, eventualmente, mejorarlas. La encuesta fue realizada un tiempo después de la cursada, por lo que algunas respuestas tuvieron la influencia de la experiencia posterior en las nuevas materias que habían cursado. El problema de realizar la encuesta finalizada la cursada es que no se puede hacer ningún cambio inmediato, aunque sí permite reflexionar globalmente sobre la práctica e intentar cambiar algunas posturas elegidas o profundizar algún tema en especial en las prácticas futuras.

Además de la encuesta, se realizaron algunas entrevistas, teniendo en cuenta el tiempo que había pasado desde que los entrevistados terminaron la secundaria, la carrera que eligieron y su participación en el aula.

El tipo de afirmaciones formuladas en la encuesta se tomaron de modelos de encuestas para reflexionar sobre el proceso de enseñanza–aprendizaje (véase, por ejemplo, Angelo y Cross (1993), Braskamp y Ory (1994) y Brookfield (1995)).

Encuesta realizada a los alumnos

Esta encuesta se llevó a cabo con los alumnos en la primera cursada de la materia, en el año 2016.

1. Edad.
2. ¿Trabajás en algo relacionado con lo que estudiás?
3. ¿Por qué elegiste la carrera?
4. ¿Sos la primera generación de universitarios en tu familia?
5. Cuatrimestre y año que cursaste la materia.

Seleccioná una opción para cada una de las siguientes afirmaciones. En cada una de las afirmaciones aparece los siguientes ítems:

- Muy en desacuerdo.
- En desacuerdo.
- Indiferente.
- De acuerdo.
- Muy de acuerdo.

Sobre la exposición del docente:

1. Las explicaciones del docente me han ayudado a entender la materia.
2. El docente insistió en los aspectos más importantes y en los de difícil comprensión.
3. El docente distribuyó el tiempo entre los temas según su dificultad.
4. El docente relacionó los nuevos conceptos con otros familiares.
5. El docente consiguió mantener mi atención durante las clases.
6. El docente relacionó los conceptos teóricos con ejemplos y problemas de aplicación.
7. El docente procuró adaptarse a la preparación previa de los alumnos.
8. El docente presentó el contexto de las ideas y conceptos desarrollados en clases.

La interacción con el grupo:

1. El docente se preocupó cuando no entendíamos algún tema.
2. El docente fomentó la participación de los alumnos.
3. El docente hizo preguntas interesantes y estimulantes en clases.
4. El docente cambió sus estrategias para afrontar situaciones imprevistas.

5. El docente me motivó a trabajar al máximo y logró lo mejor de mí.
6. El docente resolvió las dudas que le planteé.

El trato individual:

1. El trato personal que recibí por parte del docente ha sido correcto y respetuoso.
2. El docente presentó un verdadero interés para que los estudiantes aprendieran.
3. El docente se mostró accesible para responder mis preguntas y las de mis compañeros.

El contenido de la materia:

1. Los contenidos de la materia fueron interesantes y útiles para mi formación.
2. Ningún tema explicado fue redundante con otras materias.
3. La formación recibida me permitió entender temas de otras materias.
4. He encontrado al curso intelectualmente estimulante.
5. La relación entre teoría y práctica me ayudó a comprender las ideas detrás de los conceptos.

Los problemas y las prácticas del curso:

1. En los momentos de ejercitación he podido trabajar en grupos.
2. Los trabajos prácticos me ayudaron a reforzar los conocimientos vistos.
3. Los enunciados de los ejercicios fueron claros.
4. La cantidad de problemas trabajados en clase fueron suficientes para comprender los temas.
5. Los problemas me parecieron interesantes, motivadores y apropiados para entender los conceptos.

La organización del curso:

1. La información sobre el programa, el plan de estudios y las evaluaciones fue suficiente.
2. Tuve tiempo suficiente para entender y asimilar los contenidos de la materia.
3. La asistencia a clase fue fundamental para seguir la materia.
4. La metodología de enseñanza que utilizó el docente fomentó el estudio y el trabajo personal.
5. La duración de la materia respecto de los temas fue la apropiada.

La evaluación del curso:

1. Los enunciados de los ejercicios de las evaluaciones fueron claros.
2. La corrección de las evaluaciones fue clara y permitió aclarar las dudas.
3. Los exámenes evaluaron los contenidos vistos en la materia.
4. El grado de dificultad de los exámenes fueron acordes a lo visto en clase.

La bibliografía y el material del curso:

1. La bibliografía recomendada me ayudó a preparar la materia.
2. Los apuntes tomados me sirvieron a la hora de entender la materia y preparar las evaluaciones.

Si querés dejar algún comentario personal…

Respuestas a la encuesta

De un total de 30 alumnos, la mitad contestó la encuesta. Aunque son pocos, se puede tener una idea cualitativa de algunos aspectos de la cursada, tal como se muestra en los gráficos y, junto con las entrevistas, sus respuestas ofrecen material para alguna reflexión sobre los modos de aprender y enseñar.

Los alumnos que contestaron la encuesta tenían edades desde los 18 años hasta los 53 años, la mayoría, mayores de 35 años. El 50 % de ellos no trabaja en nada relacionado con la industria y el 75 % de los encuestados son primeros universitarios en la familia. Aunque no es tema de la encuesta, de esto último se desprende la importancia de crear una universidad en un barrio del conurbano. Acerca de la Universidad, el 90 % de los encuestados vive en Hurlingham o zonas cercanas, y afirma que la creación de la UNAHUR fue muy importante para volver a estudiar.

En las respuestas a la pregunta de por qué eligieron las carreras de Ingeniería Metalúrgica o Ingeniería Eléctrica, algunos afirman que lo hicieron porque son "teórico-prácticas y de esta manera, a través de la práctica es más fácil aprender. Y porque me gusta la ciencia, el por qué, el cómo, de que manera optimizar o mejorar las cosas". Esta necesidad tiene que ser un motivo para pensar cómo dar las clases, ya que deben ser clases que responsam a esa necesidad de aprender cierto conocimiento, tienen que entrelazarse lo práctico con lo teórico. Es decir, al tratar de resolver cierto problema surge la necesidad de ir construyendo, paso a paso, un determinado conocimiento. Esta manera de trabajar muestra los límites de intentar resolver el problema usando solo los conocimientos previos, y surge así la necesidad de aprender un nuevo contenido. Para ello, se necesitan relacionar varias ideas, observar regularidades y conjeturar propiedades.

A la misma pregunta, otro estudiante contestó: “Para sacarme una espina que tengo hace más de 20 años”. Acá surge otra idea antes mencionada. Los docentes cuando explican un tema no deben dejar de mirar esas ganas de los alumnos de aprender. Si se dan contenidos vacíos de motivaciones, entonces se presenta la matemática de manera lejana. La calidad no pasa por dar teoremas llenos de demostraciones, sino por poner de manifiesto un determinado concepto, relacionarlo con otros que ya se tenían, pero que eran más débiles que el nuevo y, para esto, los problemas son un motor interesante.

Es imprescindible saber qué piensan los alumnos sobre el desempeño docente, cómo se sintieron ante la propuesta didáctica desarrollada, cómo fueron las intervenciones, las preguntas, las explicaciones del docente desde la mirada de los alumnos. Es por ello que las primeras preguntas de la encuesta buscaban evaluar la claridad de las explicaciones y el interés por la materia, entre otras.

En cuanto a la exposición del docente, se puede observar que al 75 % de los encuestados les parece que las explicaciones ayudaron a entender los contenidos de la materia y que detenerse en aquellos temas de díficil comprensión fue indispensable para poder entender los contenidos.

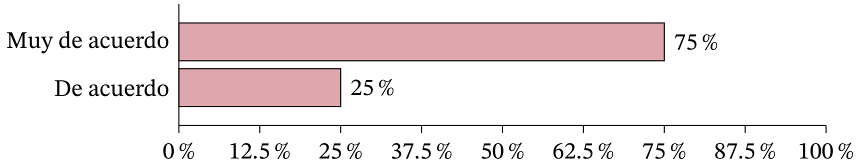


Figura III.1. Las explicaciones del docente me han ayudado a entender la materia.

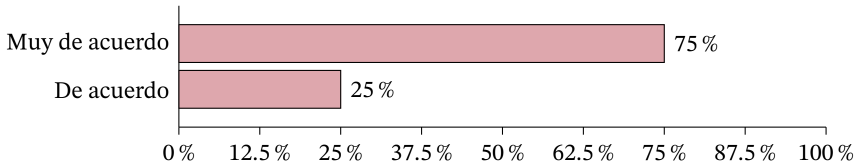


Figura III.2. El docente insistió en los aspectos más importantes y en los de difícil comprensión.

El 62,5 % de los encuestados manifiesta que el docente distribuyó correctamente el tiempo, según los grados de dificultad de los contenidos.

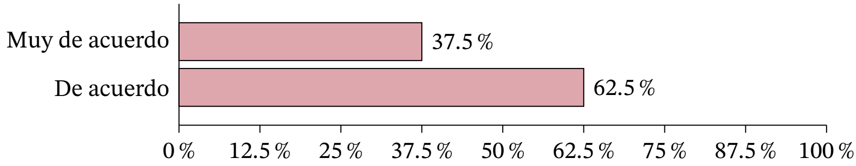


Figura III.3. El docente distribuyó el tiempo entre los temas según su dificultad.

En cuanto a la relación entre los contenidos nuevos y viejos, el 62.5 % manifiesta que estuvo de acuerdo con esa relación. Cabe aclarar, que esa relación se realizó mediante preguntas orientadoras y desafiantes, y situaciones problemáticas que permitieron mostrar la necesidad de aprender un contenido nuevo para resolverlo.

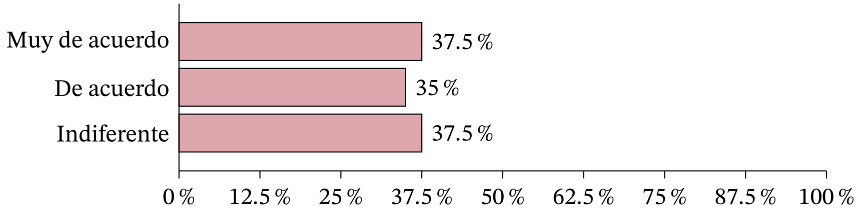


Figura III.4. El docente relacionó los nuevos conceptos con otros familiares.

Esta forma de trabajo permitió que la mayoría de los alumnos mantengan la atención por más tiempo. El 75 % de los encuestados manifiesta que pudo seguir los temas dados en la materia. Además, el 62,5 % de los encuestados sostiene que el docente procuró adaptarse a la preparación previa de los alumnos.

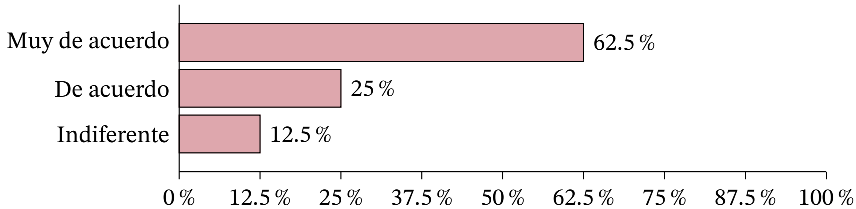


Figura III.5. El docente procuró adaptarse a la preparación previa de los alumnos.

El 50 % de los encuestados sostiene que presentar el contexto de las ideas y conceptos desarrollados en clases permitió entender la importancia de los temas a estudiar, como así también facilitó resolver las situaciones problemáticas planteadas.

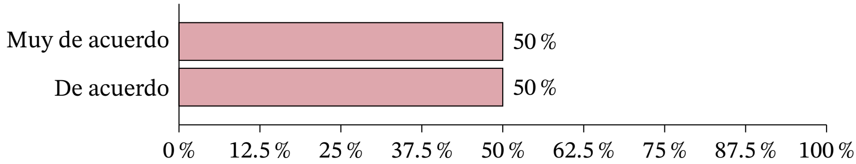


Figura III.6. El docente presentó el contexto de las ideas y conceptos desarrollados en clases.

En la encuesta también hay una familia de preguntas relacionadas con la interacción con el grupo y están referidas a la capacidad del docente para trasladar el protagonismo a los alumnos, mediante preguntas, discusiones sobre la marcha, etc. El 75 % de los encuestados coincide en que el docente se preocupó porque el grupo entendiera los temas.

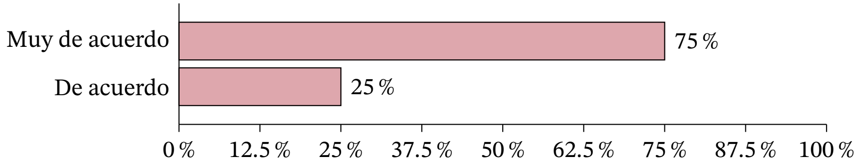


Figura III.7. El docente se preocupó cuando no entendíamos algún tema.

El 62,5 % de los encuestados manifestó que mediante preguntas se logró la motivación y la participación de todos los alumnos. Las tutorías y la hora de ejercitación en clase fueron fundamentales para que estuvieran al día con los temas. Cabe mencionar que si surgía alguna duda se trataba en clase haciendo un resumen de todo lo visto en el pizarrón. también hay que recordar que la gran mayoría trabaja y que, a veces, es difícil que estudien en sus casas de una clase para la otra.

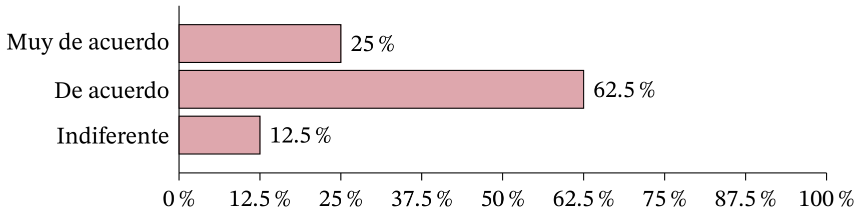


Figura III.8. El docente hizo preguntas interesantes y estimulantes en clases.

Por último el 62,5 % de los encuestados manifestó que la docente cambió la estrategia cuando sucedía algo no previsto o si no se entendía algún tema. Esto es importante, es un desafío enfrentar la incertidumbre que provoca el hecho de cambiar sobre la marcha algo que ya se tenía planificado, pero que es necesario para que todos puedan comprender la idea que se quiere transmitir.

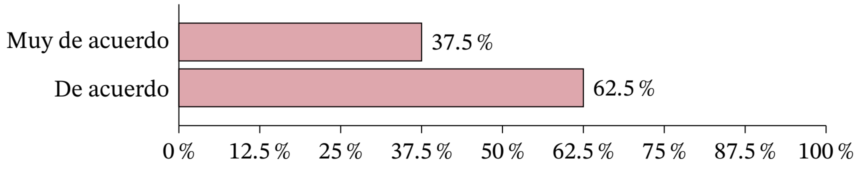


Figura III.9. El docente cambió sus estrategias para afrontar situaciones imprevistas.

Es oportuno mencionar que la mayoría de los alumnos manifestó que empezar un tema nuevo a partir de un problema permitió entender la necesidad de aprenderlo. Además, que el trabajo en grupos fue importante para hacer una primera aproximación a su estudio. También manifestó que las preguntas orientadoras fueron fundamentales para llegar al concepto a aprender.

Otras preguntas estuvieron referidas al trato personal. El trato que recibe un alumno por parte del profesor puede resultar de gran impacto. A veces la percepción que los profesores tienen sobre una determinada cuestión no coincide con la que tienen los alumnos. Las preguntas pretenden obtener información sobre esta cuestión. En este sentido, todos coincidieron en que el trato recibido por parte de la docente fue correcto y respetuoso.

El 87,5 % manifiesta que hubo un verdadero interés por parte del docente para que los alumnos aprendan determinado contenido o habilidad y que fue accesible para contestar preguntas, aunque estas se repitieran varias veces.

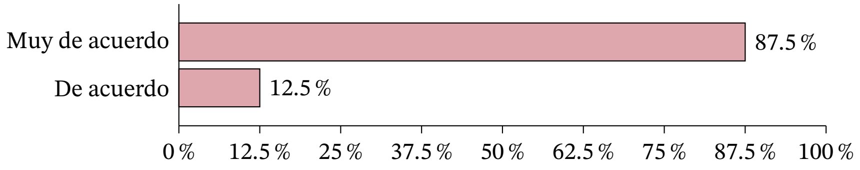


Figura III.10. El docente presentó un verdadero interés para que los estudiantes aprendan.

En la encuesta también hay una serie de preguntas referidas a los contenidos de la materia. Este es uno de los elementos que más influye en la motivación e interés de los alumnos. Hacer que estos contenidos sean atractivos es una cuestión fundamental para facilitar el aprendizaje. En esta categoría se incluyen preguntas para obtener información sobre la opinión que tienen los alumnos sobre los contenidos que brindó la materia para su formación.

La gran mayoría de los encuestados explicita que los contenidos fueron interesantes y útiles para su formación; aunque en las entrevistas personales algunos manifestaron la necesidad de profundizar más sobre vectores, rectas y planos, temas que son fundamentales para entender física, por ejemplo. Eso planteó que hay una decisión que tomar: dada la necesidad ¿será necesario recortar otro tema y ampliar el de vectores y aplicaciones?

El 75 % de los encuestados manifiesta que ningún tema explicado fue redundante con otras materias, aunque un 12,5 % manifiesta que sí. En este punto habría que prestar atención a qué contenidos de la materia se vuelven a dar en otras, porque si eso pasa, los docentes deberían evaluar, juntos, qué enfoque se debería dar en esta materia, y qué enfoque en las materias en las que se estudian temas relacionados estrechamente con ingeniería en Metalurgia e Energía Eléctrica.

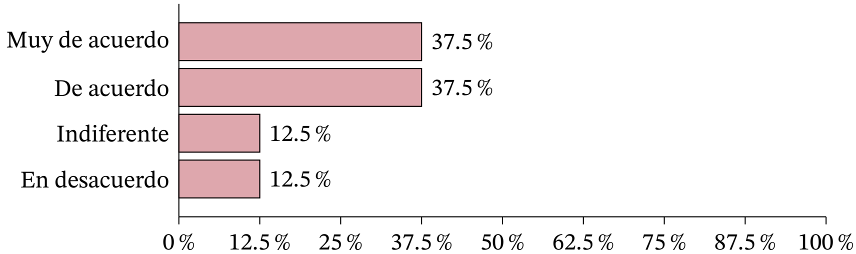


Figura III.11. Ningún tema explicado fue redundante con otras materias.

El 87,5 % de los encuestados manifiesta que la formación recibida en Álgebra y Geometría Analítica le permitió entender temas de otras materias. Indagando un poco en este punto, se pueden mencionar dos ejemplos: la noción de números complejos les permitió resolver ciertas ecuaciones diferenciales en Análisis Matemático, y la interpretación geométrica de sistemas de ecuaciones lineales les permitió afianzar el concepto de función y recta.

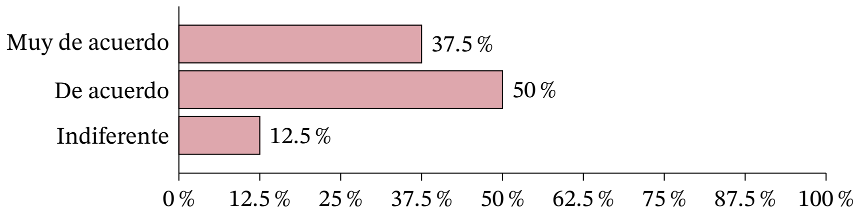


Figura III.12. La formación recibida me permitió entender temas de otras materias.

El 75 % de los encuestados manifiesta que las argumentaciones y modos de pensar matemática les resultó intelectualmente interesante. En este punto, manifiestan que los enunciados de los problemas modelo les resultaron intelectualmente interesantes ya que no estaban pensados solo para resolver una cuenta, sino que involucraba otras habilidades matemáticas; por ejemplo, la argumentación en matemática y la reflexión sobre un cálculo realizado.

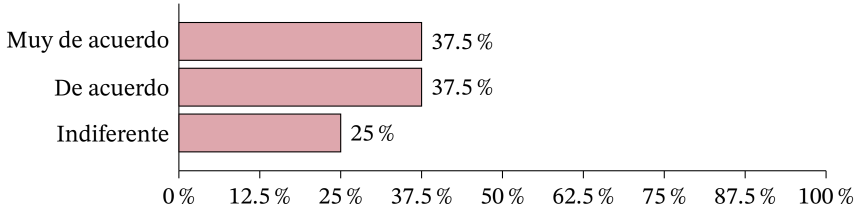


Figura III.13. He encontrado al curso intelectualmente estimulante.

Además, los estudiantes manifiestan que la relación que se dio entre la teoría y la práctica permitió comprender las ideas detrás de los conceptos.

Otras preguntas se relacionan con los problemas y las prácticas del curso. Los modos de trabajar los problemas en clase para construir contenidos ya se había hablado en este libro. Invertir el modo de presentar un tema, comenzar con un problema motivador y a partir de ahí encontrar ideas nuevas e institucionalizarlas entre todos, dándole un carácter de lema, propiedad o teorema, es importante para lograr el aprendizaje de los contenidos algebraicos y geométricos de la materia. Esta es una postura que se tomó para trabajar en esta materia, pero puede ocurrir que los alumnos la vean como una manera desorganizada de aprender, ya que los enunciados de los teoremas se presentan al final. Las preguntas de la encuesta pretenden obtener datos sobre cómo los alumnos tomaron este modo de enseñar y aprender.

El 62,5 % de los encuestados manifiesta que en los momentos de ejercitación pudieron trabajar en grupos, aunque algunos necesitaban un tiempo más para terminar los ejercicios. De esta respuesta surge la necesidad de que el docente tome una decisión sobre hasta cuándo dejar que sigan haciendo ejercicios, porque debe haber un balance entre la práctica y la teoría, ya que el objetivo de cada clase es construir un concepto, poner de manifiesto las ideas matemáticas que hay detrás de cada problema.

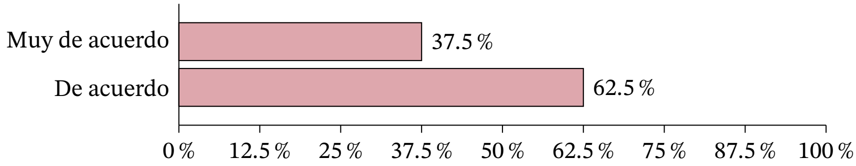


Figura III.14. En los momentos de ejercitación he podido trabajar en grupos.

El 75 % de los encuestados manifiesta que los ejercicios propuestos en las guías prácticas fueron interesantes y permitieron reforzar los temas vistos en clases. Consideran también que los enunciados de los ejercicios de las guías prácticas fueron claros, y esto es un dato importante, ya que hay que prestar atención a lo que se quiere transmitir con los enunciados. También consideran que los problemas fueron motivadores y apropiados para entender los conceptos. Además, manifiestan que la manera de trabajar con los problemas modelo permitieron observar regularidades y poder conjeturar una definición o una propiedad. Manifestaron que esta manera de trabajo, permite construir el sentido del conocimiento nuevo que se quiere enseñar y aprender.

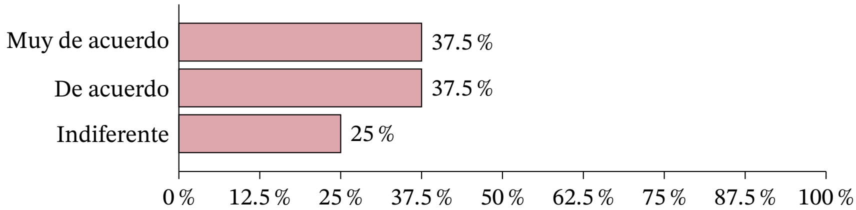


Figura III.15. Los trabajos prácticos me ayudaron a reforzar los conocimientos vistos.

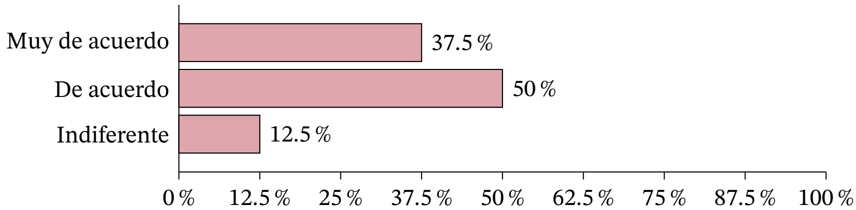


Figura III.16. La cantidad de problemas trabajados en clase fueron suficientes para comprender los temas.

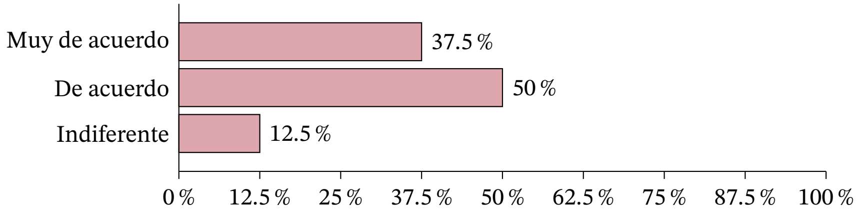


Figura III.17. Los problemas me parecieron interesantes, motivadores y apropiados para entender los conceptos.

En cuanto a la organización del curso, el 75 % de los entrevistados coincide que conocer de antemano qué se va a ver en cada clase, la bibliografía que se va a utilizar, los ejercicios que se van a trabajar, las fechas de exámenes, resultó de utilidad, entre otras cuestiones, porque les permitió organizarse para estudiar los temas con más tiempo. Cabe mencionar que los alumnos contaban con el cronograma de clases y con la bibliografía necesaria para cada una de las unidades de la materia. Aunque consideraban que faltar a una clase, era similar a perder un capítulo de una serie de televisión, ya que todos los temas estaban conectados. En este sentido, la asistencia a clases es fundamental para seguir la materia.

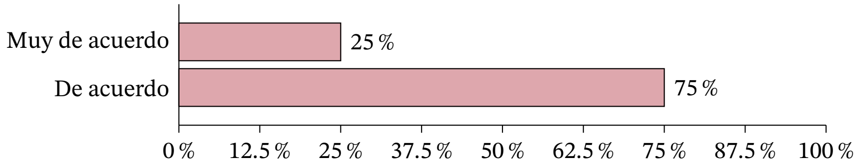


Figura III.18. La información sobre el programa, plan de estudios y evaluaciones fue suficiente.

El 25 % de los entrevistados manifiesta que necesitó más tiempo para asimilar algunos conceptos. En este punto habría que evaluar si, además de la práctica en el curso, es necesario pedirles que entreguen determinados ejercicios representativos del tema, pocos para no cargar con más trabajo al alumnado. Esto permitiría el seguimiento personalizado.

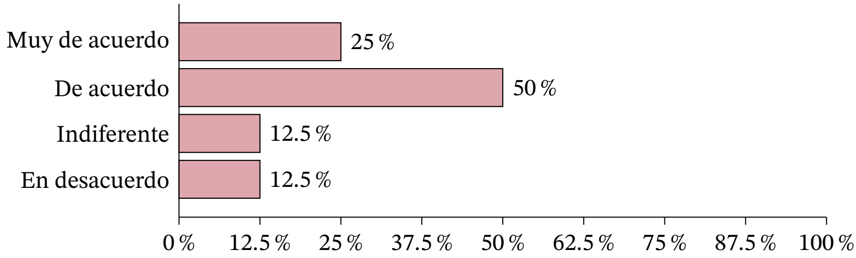


Figura III.19. Tuve tiempo suficiente para entender y asimilar los contenidos de la materia.

Todos los entrevistados aseguran que la metodología de enseñanza que se utilizó fomentó el estudio y el trabajo personal, aunque manifiestan que les faltó tiempo para asimilar determinados temas, por ejemplo, transformaciones lineales, autovectores y autovalores

Por último, en la encuesta hay preguntas referidas a los modos de evaluación. El 62.5 % de los entrevistados manifiesta que los enunciados de los ejercicios fueron claros, aunque a veces les costó encontrar el modo de argumentar en determinadas preguntas teóricas. Es llamativo que el resto de los entrevistados asegurara lo contrario: los enunciados no fueron claros. Los entrevistados consideran que la corrección de las evaluaciones fue una instancia más de aprendizaje, ya que permitió aclarar dudas. Es importante ser precisos y claros a la hora de elaborar los enunciados de los ejercicios y problemas y también es importante hacer un trabajo posterior a la evaluación con los errores y aciertos de los estudiantes.

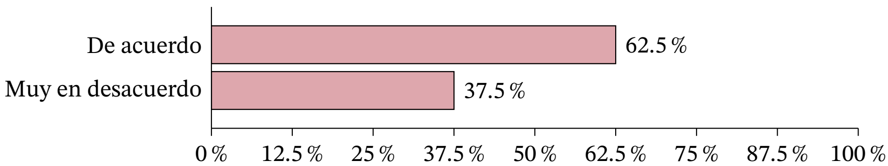


Figura III.20. Los enunciados de los ejercicios de las evaluaciones fueron claros.

El 62,5 % de los encuestados manifiesta que los exámenes tomados en el cuatrimestre, tanto los parciales, como los recuperatorios, evaluaron los contenidos vistos en la materia y los modos de trabajo en el aula, y que el grado de dificultad fue acorde con lo visto.

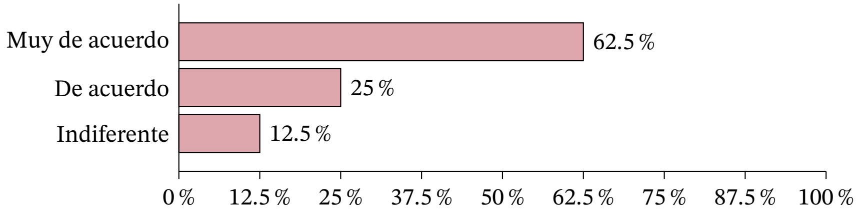


Figura III.21. Los exámenes evaluaron los contenidos vistos en la materia.

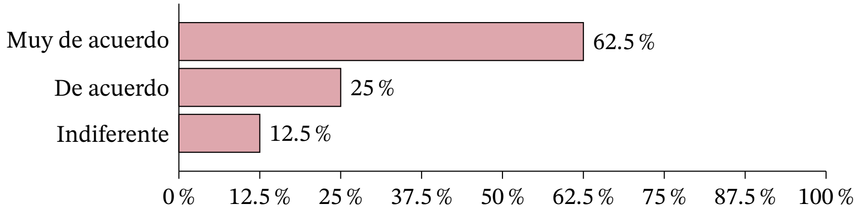


Figura III.22. El grado de dificultad de los exámenes fueron acordes a lo visto en clase.

Cabe mencionar que la gran mayoría de los alumnos coincide en que la bibliografía y el material del curso ayudó a preparar la materia y que los apuntes tomados fueron importantes para el estudio. Todos destacan la organización y la claridad del docente cuando escribía en el pizarrón. Consideran que se respetó el cronograma pautado, que los temas fueron presentados de manera acorde y que tanto las evaluaciones como los ejercicios en clase y fuera de ella permitieron el aprendizaje.

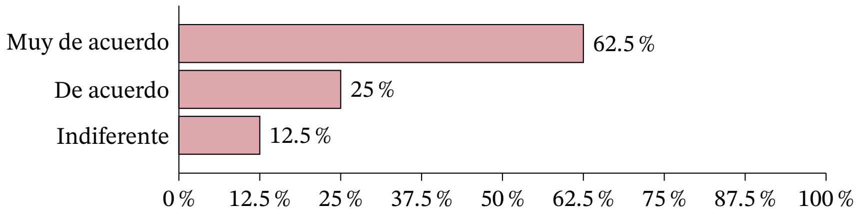


Figura III.23. Los apuntes tomados me sirvieron a la hora de entender la materia y preparar las evaluaciones.

Reflexión final

Revisando las encuestas y las entrevistas realizadas a los estudiantes, y releyendo los problemas modelo (inlcuidos en este libro) y las evaluaciones que se tomaron en clase, es posible afirmar esta propuesta didáctica fue atractiva para quienes cursaron la materia.

Al principio les resultó extraño que las clases empezaran al revés de lo que estaban acostumbrados. No se sentían cómodos de participar tempranamente, primero para resolver en grupos un problema modelo, luego para contar lo trabajado en los grupos y, finalmente, para construir una propiedad o definición a partir de la observación de todo lo trabajado.

La resolución de los problemas modelo en pequeños grupos les pareció útil, porque les permitió conocerse entre ellos y también porque facilitó la interacción entre los grupos, la reflexión y el debate. A partir de ese trabajo podían escuchar qué pensaban los demás y armar una respuesta compartida por el grupo para comunicarla en la puesta en común. También los ayudó a organizar la información que querían contar para que los demás la pudieran entender. Ese tipo de trabajo favoreció que los alumnos siguieran en tiempo los contenidos de la materia, ya que tenían pocos momentos de trabajo en casa, debido a que por la mañana trabajaban y por la tarde cursaban.

Aunque al principio les costó compartir en voz alta la producción realizada en los grupos, luego de algunas clases y de entender que compartir era necesario para el trabajo posterior de observación de regularidades y armado de propiedades, los estudiantes se sintieron motivados para contar lo que habían trabajado en sus grupos de compañeros. A medida que fueron transcurriendo las clases, observaron que el error no era sancionado sino que todas las producciones, las más aproximadas a la respuesta correcta y las más alejadas, permitían construir el sentido de la propiedad que se quería enseñar.

Los estudiantes manifestaron que construir entre todos el contenido por aprender, a partir de la reflexión en los grupos, los ayudó a comprender la necesidad de aprender ese concepto nuevo, y también el sentido de por qué los conocimientos que ya anteriores eran insuficientes para resolver el problema propuesto. Asimismo, manifestaron que cuando querían repasar estos conceptos, les parecía natural lo que quería decir la propiedad escrita en lenguaje matemático formal, debido a que recordaban la secuencia de trabajo anterior.

Los estudiantes reconocieron una secuencia entre los problemas trabajados clase a clase y las propiedades construidas, por lo que sentían que si faltaban o llegaban tarde a una clase, perdían el hilo de esa secuenciación y luego era más difícil entender por sí solos el significado de la propiedad o definición en cuestión. A pesar de eso, agradecieron el armado de un aula virtual y las clases de tutoría fuera del horario de cursada como espacios donde podían aclarar las dudas que surgían en el trabajo realizado durante las clases.

Por otra parte, argumentaron que al principio les había costado entender los enunciados de los problemas. La dificultad se centraba en que no entendían cómo contestar lo que se pedía: estaban acostumbrados a enunciados del estilo "resolver, encontrar, hallar". En cambio, los enunciados de los problemas modelo y la mayoría de las guías prácticas no tenían como fin último encontrar el resultado de una cuenta sino, a partir de ella, conjeturar una propiedad, argumentar una afirmación o explicar cuáles eran los pasos necesarios para encontrar el resultado de cierta cuenta. A medida que transcurrieron las clases, pudieron trabajar sin tantas intervenciones por parte del docente. Cabe aclarar que se hizo un trabajo previo con algunos ejercicios sencillos relacionados con temas que conocían de otras materias, en los que se pedía que trabajaran con ese tipo de habilidades matemáticas.

Otro punto que en un principio fue difícil, pero que luego de la primera evaluación fueron mejorando, fue la escritura en matemática. Hasta la primera evaluación les costaba entender qué parte de lo que se quería evaluar era la correcta escritura ordenada y argumentada de las respuestas a los problemas propuestos. Muchos estudiantes contaban que, a pesar de que sabían que era importante escribir claramente, nunca se imaginaron que podía ser parte de una evaluación matemática. En la clase hubo que reflexionar sobre los modos de argumentación y su escritura. Los alumnos hicieron entregas de producciones breves en las que se podía observar cómo escribían, más allá de la cuenta realizada. Al final de la materia, agradecieron ese tipo de práctica de escritura en lenguaje matemático porque los ayudó a mejorar sus redacciones.

También tomaron de manera positiva la exploración con Geogebra y Octave. No tuvieron dificultades con el uso de los comandos, ya que contaban con un instructivo. El trabajo con estos programas permitió que no se centraran en los cálculos algorítmicos, sino que, a partir de esos cálculos, observaran ciertas regularidades y pudieran generalizar, justificar cuándo eran posibles dichas respuestas, conjeturar una propiedad o definición a partir de numerosos ejemplos, argumentar por qué una afirmación es falsa o es verdadera, entre otras habilidades.

En cuanto las intervenciones del docente, los estudiantes manifestaron que fueron apropiadas y que permitieron entender, gracias a las preguntas orientadoras, qué contenido matemático se quería enseñar con la determinada actividad.

Por último, en cuanto a los contenidos de la materia, quedó claro que se debería reforzar el tema de vectores, de rectas y planos, necesarios para estudiar otras asignaturas como Física y Análisis vectorial. Fue acertado incluir números complejos en el programa en tanto los necesitan para resolver ciertas ecuaciones diferenciales.

En líneas generales, los estudiantes tomaron de manera positiva este modo de trabajar en el que los problemas permiten la construcción de una propiedad o de una definición, y en el que el trabajo en grupos fomenta la reflexión y la escucha de los argumentos de los otros. Los problemas de esta propuesta didáctica permitieron entender por qué y para qué aprender determinado contenido de Álgebra y Geometría Analítica.

Segunda parte

Propuesta didáctica para trabajar en clase

CAPÍTULO

1

Números complejos

En este capítulo se presenta una colección de problemas modelo para trabajar en la primera unidad temática: *Números complejos*. Se optó por presentar estos problemas modelo para cada contenido nuevo que se quiere enseñar sin proponer en qué clase hacerlo de modo tal que cada docente, de acuerdo con el ritmo de su clase, decida el momento más adecuado. También puede recurrir al *Libro para el estudiante*, para realizar las actividades correspondientes a cada tema incluidas en las secciones Guía de problemas y Ejercicios varios, un trabajo similar al que se desarrolla aquí.

Un posible trabajo es el siguiente. Reunidos en pequeños grupos, los estudiantes discuten durante un tiempo determinado cuál es la solución de un problema y escriben todas las argumentaciones o aproximaciones a la resolución que piensan. Luego, el docente introduce los conceptos que quiere enseñar, mostrando las limitaciones de los contenidos previos.

En cada problema modelo se describen cuáles son los propósitos de ese trabajo, cuáles son las posibles intervenciones del docente si los estudiantes no encuentran caminos para resolverlo, qué modo de resolución se acuerda como conclusión de la clase y, además, las definiciones y propiedades que se quieren institucionalizar.

Para resolver algunos problemas se necesitan los programas Octave o Geogebra. Octave o GNU Octave es un programa libre para realizar cálculos numéricos. Como su nombre indica, es parte del proyecto GNU. Es considerado el equivalente libre de MATLAB. Entre varias características que comparten Octave y MATLAB se puede destacar que ambos ofrecen un intérprete, lo que permite ejecutar órdenes en modo interactivo. Octave no es un sistema de álgebra computacional, como sí lo es Máxima, sino que está orientado al análisis numérico. Posee capacidades de cálculo numérico para solucionar problemas lineales y no lineales, así como otros experimentos numéricos. Tiene también capacidades gráficas para visualizar y manipular los datos. Este programa permite resolver, por ejemplo, problemas de álgebra lineal, cálculo de raíces de ecuaciones no lineales, manipulación con polinomios, entre otras funciones.

Se puede usar de forma interactiva o no (empleando ficheros que guarden programas a interpretar). Su sintaxis y semántica es muy semejante a MATLAB, lo que hace que los programas de éste sean fácilmente portables a Octave. Se lo descarga de https://www.gnu.org/software/octave y hay un manual disponible en Borrell (2010).

Geogebra es un *software* educativo libre. Se trata, básicamente, de un procesador geométrico y un procesador algebraico, es decir, un compendio de matemática con *software* interactivo que reúne geometría, álgebra, estadística y cálculo, por lo que puede ser usado también en física, proyecciones comerciales, estimaciones de decisión estratégica y otras disciplinas. Su categoría más cercana es *software* de geometría dinámica. Geogebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, entre otras. Hay manual de Geogebra disponible en M. Hohenwarter y J. Hohenwarter (2010).

Geogebra se puede descargar de la página de web oficial: https://www.geogebra.org/download?lang=es. Para celulares con sistema Android, se lo descarga de Google Play Store.

Los problemas pensados para usar Geogebra u Octave tienen como fin que, mediante la exploración, se pueda anticipar determinada propiedad matemática o se pueda aprender determinado concepto sin necesidad de cálculos a mano, además de permitir ir familiarizándose con las funciones más elementales que tienen estas poderosas herramientas digitales.

Los temas de este capítulo son los siguientes:

1. La necesidad de los números complejos.
2. Los números complejos y sus operaciones.
3. Representación geométrica de los números complejos y sus operaciones.
4. Invariantes asociados a los números complejos.
5. La forma trigonométrica de un número complejo.
6. Teorema de De Moivre y sus aplicaciones.

Y los objetivos son:

- Comprender las limitaciones de los números reales para encontrar raíces de polinomios con coeficientes reales.
- Reconocer los números complejos en sus distintas representaciones, comprendiendo las ventajas y desventajas de cada representación.
- Operar correctamente con los números complejos.

1.1. La necesidad de los números complejos

Los estudiantes ya trabajaron en alguna materia con el conjunto de los números reales, y vieron que con la suma y la multiplicación forman un cuerpo. Más precisamente, dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ y dadas las operaciones suma y multiplicación, se cumplen los siguientes axiomas:

- $a + b = b + a$ $\quad a \cdot b = b \cdot a$ (propiedad conmutativa),
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ $\quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (propiedad asociativa),
- $a + 0 = 0 + a$ $\quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (existencia del neutro de la suma),
- Para cada $a \in \mathbb{R}$ existe $(-a) \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a$ (existencia del opuesto).
- Para cada $a \in \mathbb{R}$ existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (existencia del inverso multiplicativo),

Además, vale la propiedad distributiva, es decir, la multiplicación se distribuye con respecto a la suma, o sea, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

El siguiente problema modelo pone en evidencia la limitación de los números reales para resolver determinadas operaciones matemáticas y calcular raíces.

Problema modelo

1. ¿Puede resolverse cada una de las siguientes operaciones matemáticas con una calculadora que solo opera con números reales? Justificar la respuesta.

   a) $\sqrt{1}$
   b) $\sqrt{-1}$
   c) $\sqrt[3]{-1}$
   d) $\sqrt[4]{-1}$

2. Investigar en grupos cómo la matemática ha resuelto este problema. Se puede consultar la bibliografía o recurrir a internet.
3. Sean las funciones cuadráticas $p(x) = x^2 + 1$ y $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$.
   a) Sin usar Octave, conjeturar cuántas raíces tienen. ¿Alguna raíz es real?
   b) Graficar los polinomios con Octave y conjeturar cómo son las raíces de estos polinomios. ¿Alguna raíz corta al eje X?
   c) Utilizando Octave, calcular sus raíces y representarlas en el plano.

El objetivo de la actividad es que los estudiantes observen la limitación de los números reales para encontrar raíces de ciertas ecuaciones cuadráticas o de ciertas operaciones, como el del cálculo de una raíz n-ésima de un número real negativo cuando n es par. Este nuevo conjunto numérico permite resolver cuestiones prácticas que antes no tenían solución.

Para el primer ítem del problema, entre todos deben llegar a la conclusión de que no siempre se puede calcular una raíz n-ésima de un número real. Por ejemplo, no se puede calcular la raíz cuadrada de un número real negativo. El docente, si lo considera necesario, puede recordarles la definición de raíz n-ésima de un número real.

El ítem 2 tiene la riqueza de que los estudiantes pueden investigar la historia del problema y compartir en clase lo que encontraron. Luego, el docente contará cuál es la estructura de este nuevo conjunto numérico o bien hará un trabajo de reflexión mediante preguntas los hallazgos de los estudiantes, mostrando la importancia de explicitar cuál es la fuente bibliográfica que se usa.

En el ítem 3 se pretende que el alumno arribe a conclusiones mediante la exploración con la computadora. Como el trabajo en este caso se propone con Octave, perviamente el docente tiene que dar algunas indicaciones de cómo usarlo. También sirve Geogebra. Si los estudiantes no logran solucionar esta parte del problema, se les puede recordar cómo se calculan las raíces de una ecuación cuadrática, o también, hacer un breve resumen de lo trabajado en Introducción al Análisis Matemático sobre funciones cuadráticas. Es recomendable, en este caso, dar ejercicios para que resuelvan fuera del aula.

Respecto de la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$, los estudiantes pueden observar que no tiene solución en los números reales por alguna propiedad vista en el curso de preparación o en Introducción al Análisis Matemático. Otros, viendo la gráfica, observarán que no corta el eje X. En este punto, se puede relacionar esta idea con la de que el polinomio cuadrático $p(x) = x^2+1$ no tiene raíces reales. Sin embargo, usando la fórmula resolvente para encontrar raíces cuadráticas, se concluye que existe al menos un x tal que $p(x) = 0$, y uno de ellos es $x = \sqrt{-1}$. Es decir, este número existe pero no es real, por lo trabajado anteriormente. A partir de esto se puede trabajar con la definición de número complejo.

Con el objetivo de encontrar las soluciones a este tipo de ecuaciones se introduce una cantidad imaginaria i que satisface que $i^2 = -1$. Se agrega esa cantidad al conjunto de los números reales y se construye el menor conjunto que contiene a $\mathbb{R}$ y esa unidad imaginaria. Se define así a los números complejos como los números que se escriben de la forma $a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e i la unidad imaginaria que verifica que

$i^2 = -1$. A este nuevo conjunto numérico lo llamamos el conjunto de los Números Complejos, y lo denotamos con la letra $\mathbb{C}$.

Cabe mencionar que la suma y la multiplicación en $\mathbb{C}$ se definen de la siguiente manera, dados $a + bi, c + di \in \mathbb{C}$,

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$,
- $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Este conjunto numérico verifica con estas dos operaciones todos los axiomas antes mencionados, lo que convierte a $\mathbb{C}$ en un cuerpo que extiende el de los números reales.

Nota: Para introducir el conjunto de los números complejos, también se puede elegir el ejercicio 1.1.2 de la Guía de problemas correspondiente en el Libro para el estudiante.

Si los estudiantes deben refrescar funciones cuadráticas, los siguientes ejercicios son una buena tarea previa.

Ejercicio 1.1.1. *Representar las siguientes funciones cuadráticas en el plano de ejes cartesianos.*

a) $f_1(x) = x^2 - 6x$,
b) $f_2(x) = x^2 - 6x + 9$,
c) $f_3(x) = 4x^2 - 1$,
d) $f_4(x) = (x - 2)^2 + 3$,
e) $f_5(x) = -x^2 - 8x + 9$,
f) $f_6(x) = -(x - 2)^2 - 3$.

Ejercicio 1.1.2. *En el siguiente ejercicio se pide que conjeturen, mirando los ejemplos del ítem anterior, determinadas características de la función cuadrática y de su correspondiente gráfico.*

a) *Hallar las raíces de las funciones cuadráticas del ejercicio anterior. A partir de estos ejemplos, ¿cómo se puede hallar las raíces de una función cuadrática escrita de la forma* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *o de la forma* $f(x) = a(x - h)^2 + k$
b) *¿Qué representan, gráficamente, las raíces de una función cuadrática?*
c) *Mirando los ejemplos, ¿qué indica la suma de las raíces de una función cuadrática?*
d) *La gráfica de una función cuadrática representa una parábola, que puede ser cóncava hacia arriba o hacia abajo. Mirando los ejemplos anteriores, observar que esta concavidad depende del valor de* a. *¿Cuándo la parábola es cóncava hacia arriba? ¿Y hacia abajo?*

1.2. Los números complejos y sus operaciones

Hasta aquí se definió el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos como el conjunto de los números de la forma $a+bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $i^2 = -1$. También se definieron las siguientes operaciones en este nuevo conjunto numérico.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

En este punto, el docente puede sugerir un modo de representación de los números complejos, la representación binómica, mostrar sus operaciones y algunas primeras propiedades y qué significa la parte real y la parte imaginaria de un número complejo escrito en su forma binómica.

El siguiente problema modelo tiene como objetivo introducir estas cuestiones.

Problema modelo

1. Dados $z = 5 + 3i$, $w = 7 - 3i$ y $u = 1 + 4i$ tres números complejos, realizar las siguientes operaciones y escribir al número resultante en su forma binómica, es decir, en el formato $a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

   - $z + w$
   - $w + z$
   - $z + (w + u)$
   - $(z + w) + u$
   - wz
   - zw
   - w^3
   - $(z - w)u$
   - $zu - wu$.

2. El conjunto de los números reales cumple con la propiedad conmutativa para la suma y el producto, es decir, $a + b = b + a$ y $ab = ba$, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$. A partir de lo trabajado en el ítem anterior y de las definicieesn de la suma y el producto en $\mathbb{C}$, ¿se puede decir que estas operaciones también son conmutativas en los números complejos?
3. Sea $z = (5 + a) + (3b - 1)i$ y $w = -2 - ai$ dos números complejos. ¿Cuáles son los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que el complejo z sea igual al complejo w?
4. Sabiendo que $i^2 = -1$, ¿cuánto valen i^{24}, i^{178} e i^{321}? ¿Cuánto valen, en general, i^{4n}, i^{4n+1}, i^{4n+2} e i^{4n+3} para cualquier $n \in \mathbb{N}$?
5. Sean $z = 5 - 3i^2$ y $w = 6i^{21} + 2$ dos números complejos. Calcular $Re(z)$, $Im(z)$, $Re(zw)$ e $Im(z - w)$.

El objetivo de este problema es que, a partir de la exploración con determinados cálculos, los estudiantes conjeturen ciertas propiedades referidas al conjunto de los números complejos. En este punto conviene repasar las operaciones necesarias para definir el conjunto de los números complejos, comenzando así a darle la estructura de cuerpo que extiende a los números reales.

A partir del primer ítem del problema modelo, el docente hará preguntas para que los estudiantes conjeturen que las operaciones suma y producto en $\mathbb{C}$ cumplen con la conmutativa y asociativa, y que también es válida la distributiva. Si los estudiantes no pueden resolver los cálculos, usar algún otro ejercicio de la guía del *Libro para el estudiante*.

En resumen, el trabajo grupal y el debate posterior deberían llevar a formalizar que dados z, w dos complejos cualesquiera, siempre vale la conmutativa con respecto a la suma y producto, es decir:

$$z + w = w + z,$$

$$zw = wz.$$

Dados z, w, u tres números complejos cualesquiera, siempre vale la asociativa con respecto a la suma y producto.

$$(z + w) + u = z + (w + u),$$

$$(zw)u = z(wu).$$

Se pueden proponer otros cálculos si los estudiantes no llegan a esta conjetura.

Luego, pedir que entre todo esbocen alguna demostración de estas afirmaciones o que la realicen como tarea para la clase siguiente.

A partir de este trabajo, se pueden hacer las siguientes preguntas.

- ¿Existirá, igual que en los números reales, un neutro para la suma y para el producto en los números complejos? Es decir, ¿existirá algún complejo z que cumpla que $z + w = w$ para todo complejo w?
- ¿Existirá otro complejo u tal que $uw = w$ para todo complejo w?

También, a partir del trabajo con el ítem 1, entre todos deben llegar a la conclusión de que, igual que en los números reales, en los números complejos vale la propiedad distributiva. Más precisamente, sean z, w, u tres números complejos cualesquiera,

$$(z + w)u = zu + wu.$$

Se puede preguntar a los estudiantes si cuando resuelven $z + w$ con $z = 5 + 3i$ y $w = 7 - 3i$, la respuesta es un número complejo, ya que $z + w$, en este caso es $z + w = 12$. En este punto se puede preguntar si todo número real es un número complejo.

Para resolver el ítem 3 se recomienda dar un tiempo de reflexión sobre cómo se puede decidir cuándo dos números complejos son iguales. A partir de ese trabajo se debería llegar a la siguiente conclusión.

Definición 1.2.1. *Sean* $z = a+bi$ *y* $w = c+di$ *dos números complejos, con* $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$. *Tenemos que*

$$z = w,$$

si y solo si

$$a = c, \qquad b = d.$$

También se puede definir en términos de la parte real y la parte imaginaria de un número complejo. Más precisamente, sea $z = a+bi$, se define como la parte real de z a $Re(z) = a$ y como la parte imaginaria de z a $Im(z) = b$. Se puede observar que $Re(z)$ e $Im(z)$ son dos números reales. En este sentido, $z = w$ si y solo si $Re(z) = Re(w)$ y $Im(z) = Im(w)$.

El siguiente ítem permite conjeturar cierta propiedad referida a las potencias de i. En este punto, es importante que los estudiantes intenten llegar a conclusiones, realizando cálculos y apoyándose en alguna herramienta computacional. Finalmente, deberían concluir lo siguiente:

$$i^{4n} = 1, \qquad i^{4n+1} = i.$$

Además, que

$$i^{4n+2} = i^2 = -1, \qquad i^{4n+3} = i^3 = -i.$$

Para resolver este punto es necesario apoyarse en las propiedades de la potencia de los números reales, y en que $i^2 = -1$, por definición.

El último ítem del problema modelo permite dar un cierre de todo lo visto. Un posible trabajo es que los estudiantes intenten resolverlo en grupos. El docente recoge las resoluciones y, en una clase posterior, trabaja con las maneras de escritura y de argumentación presentes en las resoluciones.

Nota: Un trabajo similar se puede realizar con los ejercicios 1.2.1, 1.2.2 y 1.2.3 del Libro para el estudiante.

1.3. Representación geométrica de los números complejos y sus operaciones

Este problema tiene como objetivo mostrar la representación vectorial del número complejo y dar una interpretación geométrica de las operaciones suma y producto entre números complejos. Para hacer este trabajo se usará la herramienta Geogebra, que permite mediante la exploración llegar a ciertas conjeturas y propiedades.

Problema modelo

Parte 1

Sean $z_1 = 1 + 3i$ y $z_2 = 2 + i$ dos números complejos.

a) Usando Geogebra representar ambos números en el mismo sistema de ejes cartesianos.

b) Una vez graficados, sumarlos en forma analítica.

c) Encontrar una manera gráfica de realizar la suma entre los complejos anteriores. Si no se encuentra, explorar con otros números complejos y llegar a una conclusión.

d) Usando Geogebra, realizar una construcción que permita sumar dos números complejos cualesquiera de la forma $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$. Escribir de manera ordenada una lista de procedimientos para hacer la construcción.

Parte 2

Sea el número complejo $z = 1 + i$.

a) Graficar dicho número en Geogebra.

b) Multiplicar z por $k \in \mathbb{R}$. Usando Geogebra, explicar qué sucede con la gráfica de z al multiplicarlo por k.

c) Multiplicar z por potencias de i. Usando Geogebra, explicar qué sucede con la gráfica de z al realizar dicha multiplicación.

d) Multiplicar z por el complejo $w = ki$ con $k \in \mathbb{R}$. Usando Geogebra, explicar qué sucede con la gráfica de z al multiplicarlo por w.

e) Al realizar la última multiplicación representada en el plano complejo, indicar de qué manera se la puede relacionar con las gráficas de las multiplicaciones realizadas en las actividades anteriores.

En cada una de las dos partes de este problema se trabajan desde puntos de vista diferentes las operaciones entre los números complejos que ya se vieron en el tema anterior.

La propuesta es que los estudiantes, reunidos en grupos de dos o tres integrantes, mediante la exploración con Geogebra resuelvan la parte 1, saquen conclusiones y luego resuelvan la parte 2.

Previamente, el docente puede mostrar cuáles son las herramientas necesarias para explorar con Geogebra. A continuación solo se da una introducción.

Breve explicación de los comandos de Geogebra

Geogebra ofrece varias Vistas para los objetos matemáticos (por ejemplo, algebraica y gráfica) que se vinculan dinámicamente. Esto significa que si se modifica un objeto en cualquier Vista, su representación en las otras se actualiza automáticamente cuando es posible.

Las vistas más utilizadas, y las que usarán en todos los problemas propuestos, son:

- **Vista Algebraica**: se ingresan directamente con el teclado (incluso el virtual) las representaciones algebraicas de los objetos (coordenadas de puntos, ecuaciones, etc.)
- **Vista Gráfica**: se pueden realizar construcciones con el mouse y luego modificarlas dinámicamente.
- **Vista Cas**: permite realizar cálculos numéricos y simbólicos.

La **Vista Gráfica** se puede usar para representar los números complejos. En este sentido, se va a trabajar con otra representación del número complejo: su representación vectorial (se volverá al tema cuando se trabaje con vectores).

Un vector $z = 2 + 3i$, escrito en su forma vectorial, se puede representar como el vector $z = (2, 3)$ en un sistema de ejes cartesianos donde en el eje X se representa la parte real del número complejo y en el eje Y se representa su parte imaginaria. Esta nueva representación en ejes cartesianos se llama *plano complejo*.

En la barra de herramientas de Geogebra hay varias opciones. En la opción punto se hace clic en la que dice número complejo. Así, moviendo el cursor, se puede ubicar el número complejo $2 + 3i$, ubicando el 2 en la parte real (eje x) y el 3 en la parte imaginaria (eje y). También se puede dibujar una flecha. Para ello, en la opción recta de la barra de herramientas se elige la que dice vector. A continuación se muestra la representación vectorial y binómica del número complejo z.

Geogebra interpreta los números complejos y opera con ellos. Usando la **Vista algebraica** y la barra de entrada se puede escribir el complejo z como $z = 2 + 3i$. Esta escritura va a producir, visualmente, el complejo en su forma vectorial $(2, 3)$. La notación $2 + 3i$ produce el objeto z, que se puede observar en la Vista Gráfica. En la Vista Algebraica se visualiza como $2 + 3i$ o como $(2, 3)$, según cómo se configure esa visualización, lo que puede hacerse seleccionando el objeto, haciendo clic con el botón derecho y seleccionando Propiedades, solapa Álgebra, opción Coordenadas.

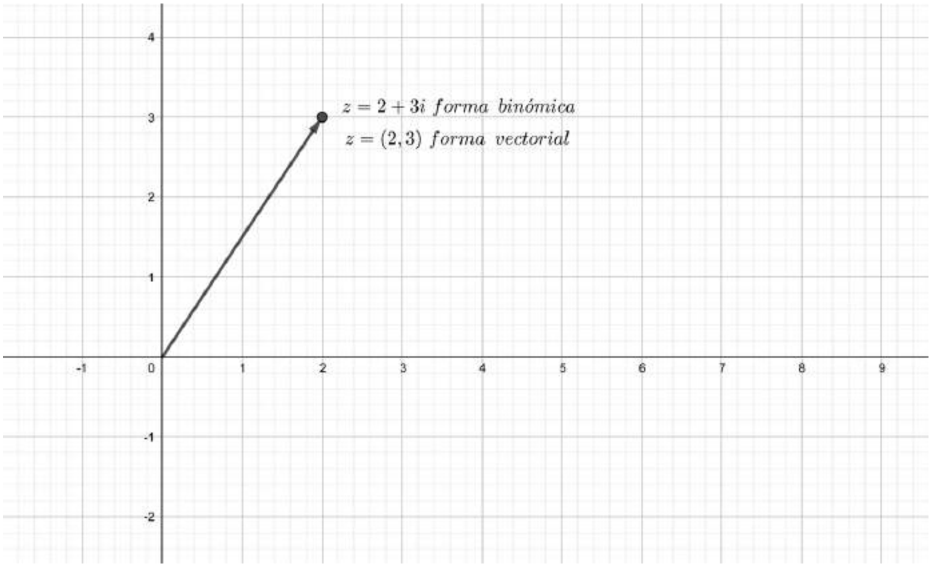


Figura 1.1

Para sumar, restar o multiplicar dos números complejos, se escriben los números en la barra de entrada y luego se los suma (con $+$ $+$), se los resta (con $-$), se los multiplica (con *), se los divide (con /) o se los eleva a potencias (con ^).

Estas operaciones también se pueden hacer con la **Vista Cas**. Para ello hay que notar que los números se escriben con $:=$, usando asignaciones. Así $z := 2 + 3i$.

Cabe observar que si se calcula sqrt(-1), esta vista devuelve la unidad imaginaria í (una i con tilde). Se la puede encontrar a la derecha, donde dice α.

A continuación se presentan algunos ejemplos de las operaciones que se pueden realizar.

```
i:=sqrt{-1}
a:=1+i
b:=1-2*i
a+b
{2 - i}
a*b
{3 - i}
a/b
```

```
{((-1) + (3 * i)) / 5}
b^2
{-3-4*i}
```

Para resolver la parte 1, se espera que los estudiantes utilicen los conocimientos previos que tienen sobre algunas propiedades del paralelogramo, por ejemplo, que tiene lados no consecutivos paralelos, y que lleguen a la conclusión que, para sumar los complejos z_1 y z_2 representados de manera vectorial, se tiene que construir el paralelogramo de lados complejos. En este sentido, la suma $z_1 + z_2$ es la diagonal de dicho paralelogramo, diagonal que sale del origen de coordenadas. Se espera que el docente les recuerde a los estudiantes cómo se construye un paralelogramo. Para esto, se puede apelar a lo visto en el curso de preparación. Si no surgen estas ideas, se aconseja tomarse un tiempo para reconstruir estos conceptos ya vistos en la escuela secundaria.

Si los estudiantes no saben cómo resolver esta parte del problema, se les pide que construyan ejemplos y que intenten observar regularidades. Por ejemplo, que construyan $z_1 = 3$ y $z_2 = 3i$ y observen geométricamente qué representa la suma $z_1 + z_2$ y cuánto es su valor. En este caso, la construcción es un cuadrado y la suma es la diagonal de dicho cuadrado, que representa el complejo $3 + 3i$.

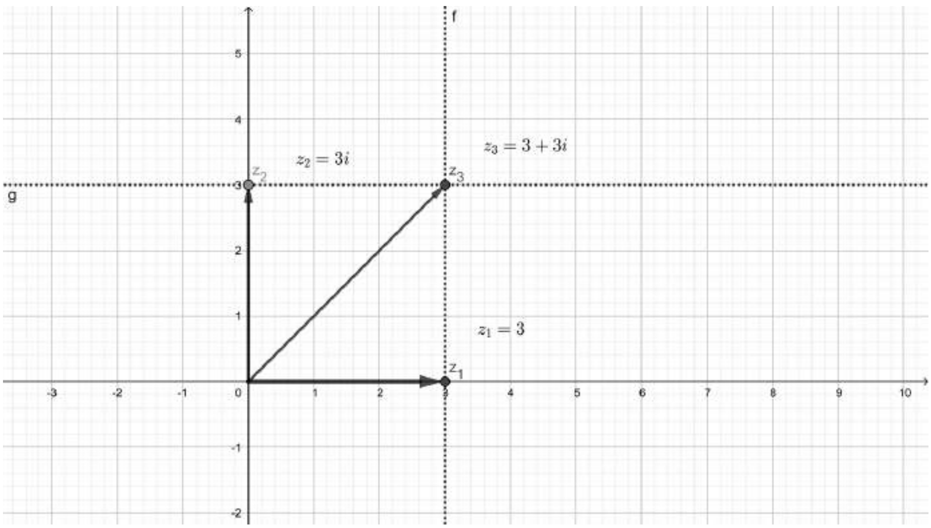


Figura 1.2

El docente también puede pedirles que escriban de manera ordenada y numerada todos los pasos necesarios para la construcción de cada suma.

Para la parte 2 del problema modelo se puede hacer un trabajo similar. La consigna es que, reunidos en grupos y mediante la exploración con Geogebra y la representación de un complejo en su forma vectorial, interpreten geométricamente qué significa multiplicar dos números complejos. En este punto se puede pedir que indiquen y resuelvan numerosos ejemplos y, luego, propongan conjeturas, observando las regularidades en los dibujos. Se puede retomar este trabajo cuando se enseñen los números complejos representados trigonométricamente.

1.4. Invariantes asociados a los números complejos

Este problema está pensado para estudiar ciertos invariantes relacionados con un complejo cualquiera. Estos invariantes son el conjugado $\overline{z}$ de un número complejo z, la relación gráfica entre z y su opuesto $-z$ y el conjugado, y por último, un trabajo referido al módulo $|z|$ del complejo z.

Problema modelo

1. Sean $z = 5 - 3i$ y $w = -1 + i^7$ dos números complejos. Resolver las siguientes consignas.
   a) Relacionar $\overline{z} + \overline{w}$ y $\overline{z + w}$.
   b) Relacionar $\overline{z} \cdot \overline{w}$ y $\overline{z \cdot w}$.
   c) Relacionar $|z| \cdot |w|$ y $|z \cdot w|$. Esta relación se debe a una propiedad de los números reales. ¿Cuál es?

   Escribir una conjetura para cada ítem anterior y demostrarla para cualesquiera z y w dos números complejos.
2. Probar las siguientes propiedades:
   a) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, para todo $z \in \mathbb{C}$.
   b) $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, para todo $z \in \mathbb{C}$ distinto de cero.

   A partir de estar propiedades, ¿cómo se puede calcular la división entre dos números complejos? Es decir, dado z y w dos números complejos, ¿cómo calcular $\frac{z}{w}$?. Calcular $\frac{5+2i}{1-4i}$.
3. ¿Es posible encontrar todos los números complejos cuyo módulo sea 1? ¿Es posible encontrar una representación gráfica de todos estos números complejos?

Este problema modelo tiene como objetivo conjeturar ciertas propiedades matemáticas referidas a números complejos a partir del cálculo con ciertos complejos particulares. Después se les pedirá que realicen una demostración sencilla de esa conjetura.

Antes de comenzar, se les puede pedir a los estudiantes o bien que investiguen cómo se definen el módulo y el conjugado de un número complejo, y que escriban estas definiciones en el pizarrón, o también, que las investiguen en Geogebra.

Definición 1.4.1. *Sea $z = a + bi$ un número complejo. Se define el módulo de z como*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Se define el conjugado de z como

$$\overline{z} = a - bi.$$

Antes de que los estudiantes intenten resolver este problema se les puede pedir que mediante el uso de Geogebra encuentren relaciones entre z y su conjugado $\overline{z}$. También, mediante la exploración pueden observar, por ejemplo, que ambos complejos tienen los mismos módulos.

En este punto se pueden introducir nuevos comandos de Geogebra. Para calcular el conjugado de z se usa el comando $conjugate(z)$. En cambio, para calcular el módulo de z se usa el comando $abs(z)$. Geogebra devuelve una aproximación del número en su forma decimal.

Para calcular la parte real de z se usa el comando $real(z)$ o $x(z)$. Para la parte imaginaria, los comandos $imaginaria(z)$ o $i(z)$.

```
i:=sqrt{-1}
z_{1}:=4+5*i
real(z_{1})
{4}
imaginaria(z_{1})
{5}
conjugate(z_{1})
```

```
4-(5*i)
abs(z_{1})
sqrt(41)
```

A continuación se da un ejemplo con Geogebra de un número complejo $z_1 = 5+4i$ y de su conjugado $z_2 := \overline{z}_1 = 5-4i$, en el cual se puede observar que los módulos de ambos complejos son los mismos. También, el opuesto de z_1, $z_3 := -z_1 = -5-4i$ tiene el mismo módulo.

Se notan con Az_1, Az_2 y Az_3 los módulos de z_1, z_2 y z_3, respectivamente. Se puede observar con Geogebra que estos módulos coinciden. Este programa da una aproximación de los módulos buscados. Más precisamente, los módulos de estos complejos coinciden y son iguales a $\sqrt{41} \approx 6.4$.

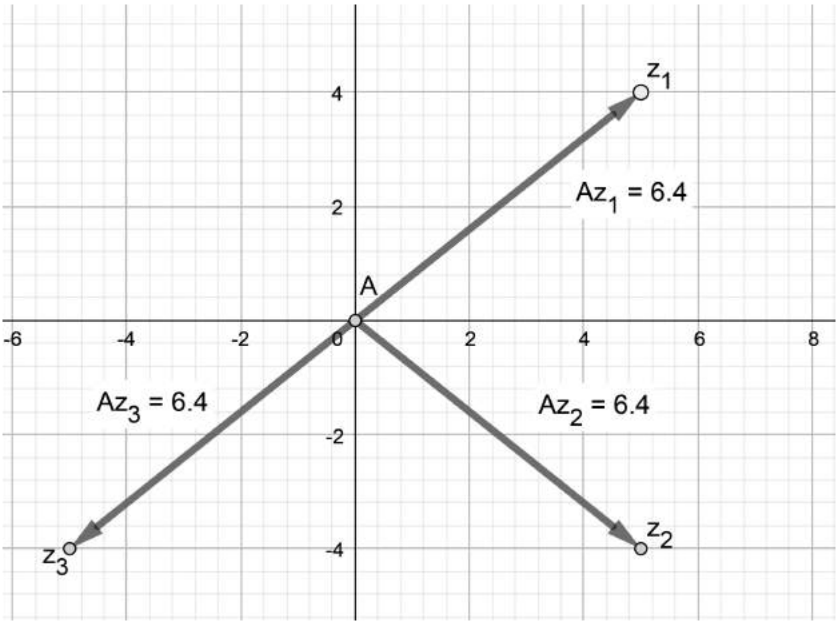


Figura 1.3

Luego se les puede pedir que trabajen en grupos con el ítem 1 de problema modelo. La idea es que, entre todos, lleguen a las siguientes conclusiones.

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w},$$

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w},$$

En el último ítem de la parte 1, los estudiantes van a arribar a la conclusión, para esos complejos particulares, de que $|z| = \sqrt{34}$ y $|w| = \sqrt{2}$. Así entre todos pueden llegar a la siguiente conclusión.

$$|z| \cdot |w| = |z \cdot w|.$$

En este punto pueden trabajar entre todos la siguiente propiedad, vista en el curso de preparación y en la escuela secundaria.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ no negativos, entonces

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},$$

Se puede hacer algunas preguntas al respecto de esta propiedad, por ejemplo: ¿por qué no es válida para los números reales no negativos? Retomar el ejercicio 1.1.2 del *Libro para el estudiante*, en el que se pregunta por la validez de la siguiente cuenta en los números reales

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 25-(-15) = 40.$$

Para terminar, se puede dejar como tarea de escritura para retomar en una clase posterior si a partir de las conjeturas de los ítems a), b) y c), se puede demostrar que en realidad las regularidades observadas valen para cualesquiera dos números complejos. Si no puede hacer estas demostraciones, proponerles que primero demuestren:

- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,

para los complejos de la forma $z = a$ y $w = di$ y luego para los complejos de la forma $z = a + bi$ y $w = di$; y, por último, para los complejos de la forma $z = a + bi$ y $w = c + di$.

Antes de proponer a los estudiantes que trabajen con la parte 2, el docente puede hacer preguntas que permitan estudiar la relación entre un número complejo y su opuesto. Algunas de estas preguntas pueden ser:

- Observar ejemplos en Geogebra y responder. ¿Qué relaciones hay en la gráfica entre un número complejo z y su opuesto $-z$? ¿Cómo son sus módulos?

- ¿Cuál es el número complejo que cumple la propiedad de que si se lo suma con cualquier número complejo z, da como resultado ese número complejo? Es decir, ¿qué número complejo w cumple con la propiedad que $w + z = z$ para todo z complejo?
- ¿Existirá algún otro número complejo u que sumado con z da el número w hallado en el ítem anterior? Es decir, ¿existirá un complejo u tal que $u + z = w$ para todo z?

La propuesta para la parte 2 del problema modelo es, primero, que los estudiantes observen, a partir de ejemplos concretos, que las igualdades son válidas. Se pueden apoyar en Geogebra para resolver este punto. Luego, pueden realizar alguna demostración. Una propuesta es que un estudiante pase al pizarrón y, con la ayuda de la clase, realice una prueba. En ese momento, el docente puede explicar qué significa demostrar en matemática y cuáles son las maneras válidas de demostración matemática.

Un trabajo previo para hacer antes de resolver el ítem 2 b) es, apelando a conocimientos previos, recordar qué significa el elemento neutro para el producto y el inverso multiplicativo en el conjunto de los números reales. Para ello, se puede apelar a conocimientos que los estudiantes tienen de los números reales y preguntar qué número real cumple con la propiedad que al multiplicarlo por cualquier número real a da ese número real, es decir, qué número real b cumple con la propiedad que $b \cdot a = a$, para todo número real a. A partir de estas preguntas deben concluir que 1 es el neutro para el producto, ya que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para cualquier valor a real.

A continuación se les puede pedir que expliquen qué significa el inverso multiplicativo de un número real a. Deben recordar entre todos que los números reales cumplen con la propiedad que para todo número real a no nulo existe un único número real b tal que $a\,b = 1$. Este número b se lo denota a^{-1} y se lo denomina el inverso multiplicativo de a. Por ejemplo, el inverso multiplicativo de $\sqrt{2}$ es $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ya que $\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$.

Llegados a estas conclusiones, se pueden hacer preguntas para que averigüen si estas dos propiedades de los números reales se satisfacen también para los números complejos. Algunas posibles preguntas pueden ser:

- ¿El número 1 es también el neutro para el producto en los números complejos? ¿Por qué 1 es un número complejo?
- ¿Tiene i inverso multiplicativo? Si lo tiene, ¿cuál es?

- ¿Tiene $2i$ inverso multiplicativo? ¿Cuál es el inverso multiplicativo de $1 + 2i$?

Después de este trabajo, el docente escribe en el pizarrón las definiciones de neutro e inverso multiplicativo en $\mathbb{C}$, y entre todos conjeturan que, para calcular el inverso multiplicativo de un número complejo no nulo, se debe operar como se propone en el ítem 2 b).

Finalmente, el docente realiza esta pregunta: a partir de la noción de inverso multiplicativo de un número complejo, ¿cómo se puede dividir $\frac{5+2i}{1-4i}$? En este punto, si los estudiantes no saben cómo responder, se les pide que intenten resolverlo con Geogebra y, luego, que expliquen cómo se puede llegar a esa respuesta.

Para ello, se les pide que usen el punto 2. Si algún estudiante recuerda de la escuela secundaria que para calcular la división de números complejos hay que multiplicar y dividir por el conjugado del denominador, se les puede preguntar en qué propiedad se apoya el cálculo que hacían en la escuela, de dónde surge el conjugado y cómo se relaciona con los puntos del problema.

La respuesta a la que todos deberían llegar es que, para dividir dos números complejos cualesquiera, se debe hacer la siguiente cuenta:

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1} = z \cdot \frac{\overline{w}}{|w|^2} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}.$$

El último ítem se puede dejar de tarea. Una propuesta es que respondan usando Geogebra.

Nota: Para un trabajo similar se puede proponer los ejercicios 1.4.3 y 1.4.4 del Libro para el estudiante.

1.5. La forma trigonométrica de un número complejo

Este problema trata otra representación del número complejo, su forma trigonométrica. Esta representación permite realizar ciertas operaciones matemáticas que son dificultosas y hasta casi imposibles de hacer con las representaciones vistas anteriormente.

La forma trigonométrica de un número complejo z se escribe

$$z = |z|(cos(\arg(z)) + isen(\arg(z))),$$

donde $|z|$ indica el módulo de z y $\arg(z)$ es el ángulo del número complejo. Este ángulo es un número real que satisface que $0 \leq \arg(z) < 2\pi$.

Este problema modelo se puede usar para introducir los conceptos o para aplicarlos.

Problema modelo

1. ¿Cuáles son el módulo y el argumento de los complejos $z_1 = i$ y $z_2 = -i$?
2. ¿Cúales son el módulo y el argumento de $z = 1+\sqrt{3}i$? A partir de estos valores, escribir la forma trigonométrica del número complejo z.
3. Tomando el módulo y argumento del complejo de 2) ¿cuáles son las representaciones trigonométricas de los siguientes números complejos?

- $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$
- $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$
- $z_3 = 1 - \sqrt{3}i$

Para resolver el problema, los estudiantes pueden trabajar en pequeños grupos y explorar con Geogebra.

Para calcular el argumento de un número complejo z_1 con Geogebra se usa el comando $arg(z_1)$. Notar que devuelve en grados sexagesimales. Para calcular el módulo de z_1 se usa el comando $abs(z_1)$. En este caso devuelve una aproximación del número en su forma decimal.

Si, en cambio, se busca la forma polar o trigonométrica de z_1, hay que pararse en el número complejo y tocar el botón derecho del mouse, elegir la opción de propiedades en el desplegado. Ahí, en la opción álgebra, se observan coordenadas. Si se pone coordenadas cartesianas, devuelve el número complejo en su escritura vectorial $z_1 = (2, 3)$. Si se usa la opción coordenadas polares, devuelve el número $z_1 = (3.61, 56.31^o)$ en donde la primera coordenada es el módulo de z_1 y la segunda es el argumento de z_1. Si se usa la opción número complejo, lo devuelve en su forma binómica.

Después de la exploración, se les pide a los estudiantes que averigüen cómo calcular, sin usar Geogebra, el argumento de un número complejo. Para hacerlo, pueden recurrir a conocimientos adquiridos en la escuela secundaria, como las razones trigonométricas.

En la institucionalización de esta parte, en el pizarrón debería quedar escrito lo siguiente.

Definición 1.5.1. *Dado $z = a + bi = Re(z) + Im(z)i$, el módulo de z es*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Para calcular el argumento $\arg(z)$ *se necesita relacionar este número real con ciertos argumentos trigonométricos. Más precisamente, si $z \neq 0$, existe un único ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$ tal que*

$$cos(\alpha) = \frac{Re(z)}{|z|}, \qquad y \quad sen(\alpha) = \frac{Im(z)}{|z|}.$$

Así, α es el argumento de z y se escribe $\alpha = \arg(z)$. El argumento de z es el ángulo que forma el segmento que une z con el origen y el eje positivo.

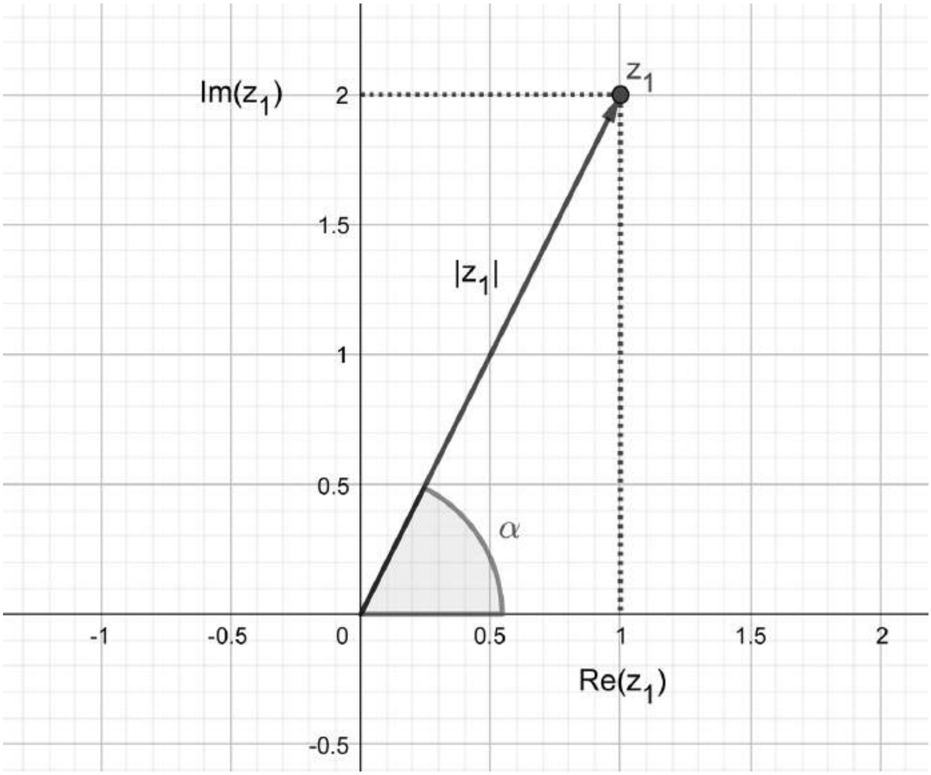


Figura 1.4

Preferentemente, hay que comenzar con los números complejos del ítem 1, ya que no se necesita una fórmula para calcularlos; se puede realizar un gráfico para visualizarlos. Una de las preguntas complementarias que se puede hacer es, a partir del argumento de i, ¿cuál es el argumento de i^2, i^3 o de i^4?

Un primer trabajo con el ítem 2 es encontrar el argumento de z usando Geogebra. A partir de allí, preguntar cómo encontrar el argumento de manera analítica, sin recurrir a una herramienta informática. En este punto, se debería trabajar con las razones trigonométricas antes planteadas y llegar a la siguiente conclusión:

$$cos(\arg(z)) = \frac{1}{2}.$$

Para este punto hay que hacer un trabajo previo sobre cómo usar la calculadora para encontrar el valor de $\arg(z)$ que cumpla, además, que $0 \leq \arg(z) < 2\pi$. Se deduce que $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$.

En este trabajo con la calculadora se puede mostrar cuál es el significado de un ángulo en radianes y de un ángulo en sexagesimales. También se pueden proponer algunos ejercicios sencillos para calcular ángulos en radianes y cómo hacer la conversión de radianes a sexagesimales, y viceversa. Este trabajo es necesario, porque Geogebra expresa los ángulos en sexagesimales y los estudiantes deben expresarlo como el único número real que se encuentra entre 0 y 2π. Aquí se necesita hacer una interpretación de los ángulos como longitud de arco, medida expresada en números reales.

Después se debe concluir entre todos que z escrito en forma trigonométrica es:

$$z = 2(cos(\frac{\pi}{3}) + isen(\frac{\pi}{3})).$$

A continuación, se puede relacionar el argumento de z con los argumentos de los complejos del ítem 3. Intentar hacer un trabajo entre todos mostrando estas relaciones con los gráficos correspondientes. También se les puede dar a los estudiantes un tiempo para que exploren con Geogebra. Algunas preguntas que permiten ordenar la puesta en común son:

- ¿Hay alguna relación entre los argumentos de z y los de z_1, z_2 y z_3?
- ¿Cómo son los módulos de todos los números complejos involucrados?
- ¿Cómo se relacionan los argumentos de z_1, z_2 y z_3 a partir del argumento de z?

Las conclusiones deberían ser las siguientes. Como la representación gráfica del número complejo z_1 se encuentra en el segundo cuadrante del plano complejo mientras que z se encuentra en el primer cuadrante, entonces

$$\arg(z_1) = \pi - \arg(z) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Además, como el número complejo z_2 se puede graficar en el tercer cuadrante del plano complejo, entonces

$$\arg(z_2) = \pi + \arg(z) = \frac{4\pi}{3}.$$

Por último, como z_3 se encuentra en el cuarto cuadrante del plano complejo, entonces

$$\arg(z_3) = 2\pi - \arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

Todos estos números complejos tienen el mismo módulo que z. De esta manera se concluye que las formas trigonométricas de estos complejos son:

- $z_1 = 2(cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3}))$,
- $z_2 = 2(cos(\frac{4\pi}{3}) + isen(\frac{4\pi}{3}))$,
- $z_3 = 2(cos(\frac{5\pi}{3}) + isen(\frac{5\pi}{3}))$.

1.6. Teorema de De Moivre y sus aplicaciones

Este problema modelo está pensado para trabajar con ciertas propiedades de los números complejos cuando están escritos en su forma trigonométrica. Estas propiedades, que están basadas en la fórmula de De Moivre, permiten contestar ciertas preguntas que con otra representación del número complejo resultaría mucho más difícil.

Problema modelo

Parte 1

Escribir tres ejemplos de números complejos z y w en Geogebra. Resolver las consignas que siguen para los tres ejemplos:

a) ¿Existe alguna relación entre los módulos de z y w, y el de la multiplicación entre ellos?

b) ¿Existe alguna relación entre los argumentos z y w, y el de la multiplicación entre ellos?

c) Encontrar una relación entre los módulos y argumentos de z y el de z^2; también con el de z^3.

Parte 2

Sea el número complejo $w = 1 + i$.

a) Escribir en Geogebra la representación trigonométrica o polar de w. En la vista gráfica, dibujar el vector w y su argumento. Para dibujar el argumento, usar la opción ángulo que se encuentra en la barra herramientas.

b) Calcular con Geogebra una raíz cuadrada de w con el comando $sqrt(w)$ y escribirlo en su forma polar. Dibujar el vector y su ángulo. Encontrar una relación entre el módulo y argumento de w con el módulo y argumento de la raíz cuadrada encontrada. ¿Cómo se puede calcular con Geogebra la otra raíz cuadrada de w?

Parte 3

a) Dado $w = 1 + i$ ¿cómo se puede calcular w^{124}?¿ Y w^{-124}?

b) Calcular de dos maneras las raíces cuadradas de $w = 1 + i$.

Este problema tiene el objetivo de que, mediante la exploración con Geogebra y el debate posterior, los estudiantes construyan ciertas propiedades que involucran la escritura del complejo en su forma trigonométrica y alguna de sus propiedades más importantes.

Para resolver la primera parte del problema, se puede pedir a los estudiantes que realicen construcciones con Geogebra, intentando identificar regularidades relacionadas con el módulo de dos números complejos z y w, y el módulo de la multiplicación entre ellos.

El docente puede intervenir en los grupos mediante preguntas orientadoras que lleguen a la siguiente conjetura. Dados z y w dos números complejos,

$$|z\,w| = |z|\,|w|.$$

También se les puede pedir que encuentren una regularidad entre los ángulos de dos números complejos y su producto. Si no pueden encontrarla, se les puede proponer, primero, complejos más simples, como $z = 1 + i$ y $w = i$. Para este ejemplo se tiene que:

$$\arg(z\,w) = \arg(z) + \arg(w).$$

Dar otros ejemplos, como $z = 1 + i$ y $w = 1 - i$. En este ejemplo, los estudiantes van a llegar a la idea de que $\arg(z\,w) = \arg(z) + \arg(w) - 2\pi$. Dar luego otros ejemplos que permitan restar más de una vez el valor 2π, como $z = -i$, y pedir que calculen el argumento de z^3 o de z^4. Se les puede preguntar lo siguiente.

- ¿Existe alguna regularidad respecto de los argumentos para cada potencia de i?
- ¿Cuánto vale $\arg(i^n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$?

La idea es que entre todos lleguen a la siguiente conclusión.

Sean z y w dos números complejos cualesquiera. Se tiene la siguiente igualdad:

$$\arg(z\,w) = \arg(z) + \arg(w) - 2\pi k,$$

para algún k entero, donde $2\pi k$ indica cantidad de vueltas de más que dio el argumento del complejo $z\,w$.

Luego de este trabajo se puede pedir a los estudiantes que intenten resolver el ítem a) de la parte 3. Escribir luego las conclusiones en el pizarrón. Las propiedades que deberían quedar escritas, luego del trabajo en grupos y del debate posterior, son las siguientes.

Proposición 1.6.1. *Sean z y w dos complejos cualesquiera. Entonces*

$$|z\,w| = |z|\,|w|,$$

$$\arg(z\,w) = \arg(z) + \arg(w) - 2\pi k,$$

para algún k entero.

El otro conocimiento que surge del trabajo con este problema es el cálculo de la raíz cuadrada de un número complejo. En este sentido, el primer problema de la parte 2 permite, mediante la exploración con Geogebra, encontrar las relaciones entre una raíz cuadrada $\sqrt{w}$ de w y el complejo w propiamente dicho. A partir del trabajo realizado, se debería llegar a la conclusión de que si se quiere calcular una raíz cuadrada de w, hay que encontrar todos los z tales que $z^2 = w$. En este sentido, hay que encontrar el módulo de z y su argumento. Para ello, según el trabajo experimental, se observa que los complejos z deben cumplir las siguientes propiedades.

$$|z| = |w|^{\frac{1}{2}} \qquad \arg(z) = \frac{\arg(w)}{2} + k\pi,$$

con k entero.

Así, dado $w = \sqrt{2}(cos(\frac{\pi}{4}) + isen(\frac{\pi}{4}))$, los valores de z representados en forma trigonométrica son:

$$z_1 = \sqrt[4]{2}(cos(\frac{\pi}{8}) + isen(\frac{\pi}{8})),$$
$$z_2 = \sqrt[4]{2}(cos(\frac{9\pi}{8}) + isen(\frac{9\pi}{8})).$$

En este punto se puede preguntar qué relación encuentran entre z_1 y z_2. Para contestar, se pueden graficar ambos números complejos en un mismo sistema de ejes cartesianos.

Por último, en el ítem b) de la parte 3 hay que encontrar las raíces cuadradas de una manera diferente de la vista en la parte 2. Aquí se puede hacer un doble trabajo, primero preguntar cuándo dos números complejos escritos en su forma binómica son iguales y cuándo dos números escritos en su forma trigonométrica son iguales. A continuación, se puede preguntar cómo se pueden encontrar todos los valores de z, representados en forma binómica, para los cuales $z^2 = w = 1 + i$.

Luego se puede hacer la pregunta ¿cómo podemos encontrar estos valores de z pero cuando tanto w como z se encuentran escritos en forma binómica? Todos deben darse cuenta de que, para resolverlo de esta manera, necesitan encontrar la solución de un sistema de ecuaciones no lineales. Más precisamente, sea $z = a + bi$, $z^2 = (a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$. Como $z^2 = w = 1 + i$, entonces

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Por otro lado, por propiedad de módulos, $|z|^2 = |w|$, es decir,

$$a^2 + b^2 = \sqrt{2}. \tag{1.2}$$

Sumando la primera ecuación de (1.1) con (1.2),

$$2a^2 = 1 + \sqrt{2} \tag{1.3}$$

Si en cambio las restamos, tenemos la siguiente ecuación no lineal

$$2b^2 = \sqrt{2} - 1 \tag{1.4}$$

De esta manera hay cuatro posibilidades para los valores de a y b del número complejo $z = a + bi$. Es decir, $a = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ y $b = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

¿Cómo se pueden encontrar los valores correctos de a y b para obtener los dos valores de z buscados? En este punto hay que trabajar que se necesita que los valores de a y de b cumplan con las tres ecuaciones no lineales. Así de la ecuación $2ab = 1$ se deduce que los valores son $a = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ y $b = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ y $a = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ y $b = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

Así los complejos que verifican que $z^2 = w$ son $z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i$ y $z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i$.

Por un lado, los números complejos que cumplen que $z^2 = w$ escritos en forma trigonométrica son:

$$z_1 := \sqrt[4]{2}\left(cos(\frac{\pi}{8}) + isen(\frac{\pi}{8})\right)$$
$$z_2 := \sqrt[4]{2}\left(cos(\frac{9\pi}{8}) + isen(\frac{9\pi}{8})\right)$$

Por otro lado, los z escritos en su forma binómica son:

$$z_1 := \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i$$
$$z_2 := -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i.$$

Aquí se puede trabajar con un concepto transversal, el de decidir si cierto número es racional o no; para ello se puede preguntar ¿$cos(\frac{\pi}{8})$ es un número racional? Justificar la respuesta. También se puede trabajar con las representaciones de un número complejo y observar, por ejemplo,

$$\sqrt[4]{2}cos(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \qquad \sqrt[4]{2}sen(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

De la misma manera:

$$\sqrt[4]{2}cos(\frac{9\pi}{8}) = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \qquad \sqrt[4]{2}sen(\frac{9\pi}{8}) = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

Así se concluye que estos números son reales. Existen infinitos números reales, pero no se conocen muchos. Aquí hay ejemplos de otros números reales no racionales, distintos de los conocidos. Finalmente, se les puede pedir encontrar otros números reales.

CAPÍTULO

2

Sistemas de ecuaciones lineales

En este capítulo se desarrolla la propuesta de trabajo para la segunda unidad de la materia: *Sistemas de ecuaciones lineales.*

Como en cada capítulo correspondiente a una unidad del programa de la materia, hay problemas modelo al inicio de cada tema, con alguna breve propuesta de cómo trabajarlos en clases. El docente encontrará más material en las secciones Guía de problemas y Ejercicios varios correspondientes del *Libro para el estudiante*.

También se describen los propósitos de trabajo de cada problema, las posibles intervenciones del docente, qué modo de resolución se acuerda como conclusión de la clase y cuáles son las definiciones y propiedades que se busca formalizar.

Los temas de esta unidad son los siguientes:

1. Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales.
2. Interpretación geométrica de sistemas de ecuaciones lineales.
3. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales: el método de eliminación gaussiana.
4. Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales según sus soluciones.

Los objetivos son:

- Modelizar los problemas a través de sistemas de ecuaciones lineales.
- Interpretar geométricamente sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales generales mediante la eliminación gaussiana indicando el tipo de solución que tiene dicho sistema.
- Anticipar la cantidad de soluciones que tiene un sistema de ecuaciones lineales arbitrario, sin necesidad de encontrar sus soluciones.

2.1. Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales

El siguiente problema modelo está pensado para introducir la necesidad de los sistemas de ecuaciones lineales: modelizan ciertos problemas que surgen en ámbitos ajenos a la matemática. Este tipo de sistemas es central dentro del Álgebra Lineal. Comenzar esta rama de la matemática a partir de la modelización de sistemas de ecuaciones lineales permite mostrar un doble juego: observar que muchos modelos que aparecen en la ingeniería se modelizan por medio de estos sistemas e introducir la aritmética básica para tratar problemas en los que intervienen más de una variable.

A partir de las modelizaciones planteadas, se puede pedir a los estudiantes que intenten encontrar una solución, usando algunos métodos vistos en la escuela secundaria (como sustitución e igualación), con el único fin de mostrar que debe existir una manera algorítmica de resolver sin marearse tanto con las incógnitas. No es el objetivo de este problema mostrar las técnicas para encontrar las soluciones. En este sentido, los estudiantes van a intentar encontrar la solución del sistema y, al tener tantas incógnitas a despejar, se van a entrecruzar en los cálculos. Este problema pretende, por un lado, introducirlos en la modelización de problemas a través de sistemas y, por otro, descubrir, con los cálculos, que no es tan sencillo encontrar la solución con las técnicas vistas en la secundaria.

Problema modelo

Parte 1: Ecuaciones lineales

¿Es posible modelizar las siguientes situaciones problemáticas mediante una ecuación lineal? Si es posible, escribir dicha ecuación identificando el significado de la variable. Luego, responder las preguntas.

a) ¿Qué número sumado con su mitad y su tercera parte da como resultado 55? ¿Este número es entero?

b) ¿Qué número cumple con la condición de que la suma de tres números enteros consecutivos es igual al doble del menor más 1? ¿Qué ocurre si se pide que el número sea natural?

c) ¿Cuánto valen los lados de un rectángulo cuyo perímetro es de 35 cm?

Parte 2: Sistemas de ecuaciones lineales

Laura compró un abrigo que estaba rebajado un 15 %. Irene eligió uno que era 250 pesos más caro, que el de Laura, pero consiguió una rebaja del 20 %, por lo que solo pagó 80 pesos más que Laura ¿Cuál era el precio de cada abrigo?

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema, identificando el significado de cada incógnita.
b) Resolver el sistema de ecuaciones lineales y responder la pregunta.
c) Verificar que la solución del sistema de ecuaciones es solución del sistema de ecuaciones lineales propuesto.

Parte 3: Sistemas de ecuaciones lineales en la vida cotidiana

El siguiente problema permite modelizar a través de sistemas de ecuaciones lineales una determinada situación de la vida cotidiana: el flujo de tránsito.

En la siguiente red se muestra el flujo del tránsito (en vehículos por hora) sobre varias calles de un solo sentido en el centro de una ciudad durante todo un día.

Una red consiste de un conjunto de puntos, llamados uniones o nodos, con líneas o arcos, llamadas ramas, que conectan a algunos o todos los nodos.

La dirección del flujo se indica en cada arco y la cantidad (o tasa) de flujo se muestra por medio de una variable.

El supuesto básico del flujo de redes es que el flujo que entra a la red es igual al flujo que sale de la red y que el flujo entrante a un nodo es igual al flujo saliente del nodo.

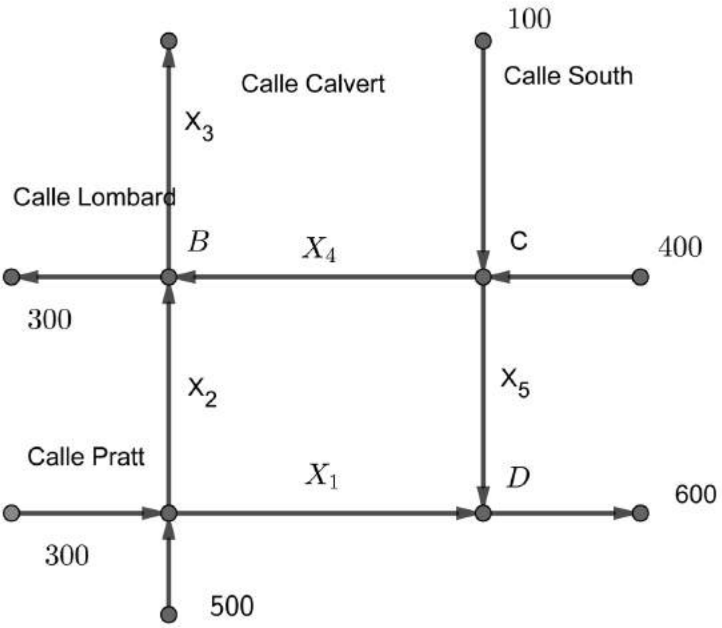


Figura 2.1

a) Describir con un sistema de ecuaciones lineales el siguiente problema para determinar el patrón de flujo general de la red vial.
b) ¿(500,300,400,400,100) es un patrón de flujo del sistema?
c) Encontrar otro patrón de flujo para el sistema.

El objetivo de la primera parte del problema es hacer una introducción de la ecuaciones lineales mediante algunas situaciones sencillas.

Un posible trabajo es que los estudiantes, en grupos reducidos, intenten modelizar las situaciones mediante ecuaciones lineales. Algún grupo puede encontrar la respuesta deseada a cada pregunta sin necesidad de modelizar el problema mediante ecuaciones lineales. Si es así, se puede preguntar lo siguiente.

- ¿Cómo se puede modelizar el problema mediante una ecuación lineal?
- ¿Qué es una ecuación lineal?
- ¿Qué significado tiene la incógnita en cada caso particular?

Para resolver el ítem a) los estudiantes pueden encontrar que 30 es la solución, ya que $30 + 15 + 10 = 55$. Para resolver ese punto no tuvieron necesidad de encontrar una ecuación lineal. Si no surge la ecuación lineal, hay que intentar forzar a que la encuentren. Se puede trabajar con el significado simbólico de la mitad de un número desconocido x o la tercera parte de un número. Algunos estudiantes pueden llegar a que la ecuación que modeliza el problema es $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 55$. Se puede preguntar entonces, si existen otras ecuaciones lineales equivalentes. Luego, se pueden realizar las siguientes preguntas.

- ¿Qué significa que las ecuaciones encontradas sean equivalentes? Un ejemplo de otra ecuación que modeliza la ecuación anterior es $\frac{11x}{6} = 55$.
- ¿Cuál es la ventaja de esta última ecuación respecto de la anterior?
- ¿Por qué ambas ecuaciones lineales son equivalentes?

Para el ítem b) uno de los problemas que se pueden presentar es que los estudiantes no recuerden qué significa número consecutivo. En este punto se espera que intenten llegar a la siguiente ecuación lineal:

$$x + x + 1 + x + 2 = 2x + 1,$$

donde x es el número a buscar. Respecto de la pregunta acerca de si existe un x natural que verifique la ecuación lineal, se espera que los estudiantes argumenten que no tiene solución natural, sin hacer el despeje, justificando, por ejemplo, que si x es natural, entonces $3x + 3$ es más grande que $2x + 2$. Otra pregunta que se puede hacer es si pueden encontrar otras ecuaciones equivalentes que modelicen la pregunta del problema.

El último ítem tiene la dificultad adicional de que involucra algún concepto de geometría elemental, por ejemplo, las características de un rectángulo y el significado de perímetro. Trabajar con los estudiantes estos conceptos si no consiguen seguir adelante. Tienen que llegar a la conclusión de que si x e y son los lados de un rectángulo, entonces su perímetro es $2x + 2y$; por lo que para que éste sea 35 cm tiene que ocurrir que

$$2x + 2y = 35.$$

A partir de aquí, el docente puede trabajar junto con la clase las condiciones que tienen que cumplir x e y para que sean lados del rectángulo y, además, cumplan con la condición anterior.

Un trabajo que se puede hacer es que grafiquen todos los posibles valores de x e y para que formen el rectángulo de perímetro 35 cm. Luego deben explicar qué representa la gráfica realizada y por qué este tipo de ecuaciones se llama lineal.

A partir de este trabajo se puede definir entre todos el concepto de ecuación lineal, el de incógnita de una ecuación lineal y el de su solución.

La parte 2 tiene como objetivo modelizar una situación problemática a través de un sistema de ecuaciones lineales con varias incógnitas. Los estudiantes deben encontrar los valores de esas incógnitas que verifican cada una de las ecuaciones lineales del sistema.

El problema de este ejercicio es que involucra porcentajes y que hay que leer varias veces el enunciado para encontrar las ecuaciones e identificar las incógnitas.

La propuesta de trabajo es que los estudiantes identifiquen las variables y se pregunten qué quieren conocer a partir del problema, y luego, que a partir de la lectura identifiquen las ecuaciones lineales involucradas.

Un primer problema que puede surgir es que los estudiantes no puedan identificar las incógnitas. En este punto deben releer entre todos las preguntas.

Todos los grupos deberían poder identificar dos incógnitas o variables: el precio del abrigo de Laura sin rebaja y el precio del abrigo de Irene sin rebaja. Se llamará x a la primera e y a la segunda.

Otra dificultad que puede surgir es que los estudiantes no recuerden qué significa aplicar un descuento del 15 % a un determinado precio, y cuál es el nuevo precio. Si esto sucede, es recomendable dar ejemplos de la vida cotidiana.

Con este trabajo deberían llegar a la ecuación lineal $\frac{80}{100}y = \frac{85}{100}x + 80$. Se pueden hacer preguntas acerca del significado de esta ecuación lineal. Por ejemplo, ¿cómo se puede modelizar la frase el abrigo de Laura tiene un descuento del 15 %, el de Irene tiene un descuento del 20 % y con estos descuentos Irene paga 80 pesos más que Laura?

Luego, se puede preguntar:

- ¿Cuál es la otra ecuación lineal que se puede deducir a partir de la lectura?
- ¿Qué frase permite encontrar dicha ecuación lineal?

Entre todos deberían llegar a la ecuación lineal $y = 250 + x$. (Irene ha comprado un abrigo 250 pesos más caro que el de Laura).

El sistema de ecuaciones lineales que modeliza el problema es:

$$\begin{cases} y = 250 + x \\ \frac{80}{100}y = \frac{85}{100}x + 80 \end{cases} \tag{2.1}$$

Una vez encontrado este sistema de ecuaciones lineales, se puede trabajar con las maneras de resolver este sistema. Las siguientes preguntas orientan ese trabajo:

- ¿Qué significa encontrar una solución del sistema de ecuaciones?

- ¿Por qué, efectivamente, es una solución del sistema de ecuaciones lineales?
- ¿Cómo encontrar dicha solución?

Pueden surgir varias técnicas para encontrar la solución del sistema (2.1). Algunas pueden llevar a un sistema equivalente. Si no surge otro sistema equivalente, se puede preguntar qué sucede si se multiplica la segunda ecuación de (2.1) por $\frac{100}{80}$. Deberían poder escribir el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} y = 250 + x \\ y = \frac{85}{80}x + 100 \end{cases} \tag{2.2}$$

Se puede trabajar con todas las maneras equivalentes de reescribir el sistema (2.1). Por último, el docente pide que averigüen cuál es la solución del sistema de ecuaciones lineales planteado. En este caso la solución es $(2400, 2650)$, es decir, el abrigo de Laura sin rebaja cuesta 2400 pesos y el de Irene, 2650 pesos. A partir de allí, hay que reforzar la idea de sistema equivalente y solución de un sistema de ecuaciones lineales, preguntando, por ejemplo:

- ¿La solución encontrada es solución de ambos sistemas?
- ¿Qué ventaja tiene el sistema (2.2) respecto del sistema (2.1)?

En este punto ya pueden definir sistemas de ecuaciones lineales, incógnitas y solución de un sistema de ecuaciones lineales.

La parte 3 trabaja con problemas que se pueden modelizar con sistemas de ecuaciones lineales y que surgen de ámbitos fuera de la matemática.

Se puede proponer que trabajen en pequeños grupos con el problema de la circulación vial. Se recomienda leer cuáles son las definiciones involucradas en el problema para poder encontrar las ecuaciones del sistema.

- ¿Cómo se traduce, a la luz de las ecuaciones lineales, la información de que en un flujo de redes el flujo que entra a la red es igual al flujo que sale?
- ¿Y que el flujo entrante en un nodo es igual al flujo saliente del nodo?

En este punto, entre todos deberían haber observado que si se etiqueta cada nodo con una letra, se sabe que en cada intersección el flujo que entra es igual al que sale. ¿Cómo se traduce esto en una ecuación? Responden entre todos esta pregunta. Por ejemplo, en la intersección A, el flujo entrante es $300 + 500$. Este valor debe ser igual que el saliente, que en este caso no se conoce, por lo que es $x_1 + x_2$.

De la misma manera deberían llegar todos a la siguiente conclusión. En B, $x_2 + x_4$ tiene que ser igual que el flujo saliente $300 + x_3$. En la intersección C tienen que

$100 + 400$, el flujo entrante debe ser igual a $x_4 + x_5$. Y por último, en la intersección D, el flujo entrante $x_1 + x_5$ debe ser igual a 600. A partir de todo este trabajo, se puede trabajar con las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas ecuaciones se encontraron hasta acá?
- ¿Cuántas incógnitas tienen?
- ¿Habrá otra ecuación?
- ¿Hay algún dato del enunciado que no se usó?

Los estudiantes deberían llegar a que, de la información de que el flujo total entrante debe ser igual al flujo total saliente de la red, $500 + 300 + 100 + 400 = 600 + x_3 + 300$.

De esta manera, en el pizarrón debe quedar escrito un sistema de 5 ecuaciones lineales con 5 incógnitas.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 800 \\ x_2 + x_4 = 300 + x_3 \\ 500 = x_4 + x_5 \\ x_1 + x_5 = 600 \\ 1300 = 900 + x_3 \end{cases} \tag{2.3}$$

Hay un salto importante respecto de las partes anteriores del problema modelo. Antes, o bien los enunciados correspondían a una ecuación lineal, o bien a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. En este caso, el problema corresponde a un sistema de 5 ecuaciones lineales con 5 incógnitas. Se decidió incluir como propuesta de trabajo este tipo de sistemas para mostrar, de algún modo, que los problemas que pueden surgir en el trabajo de un futuro ingeniero involucran muchas ecuaciones interrelacionadas, con muchas incógnitas. Otra dificultad que tiene este problema es que no tiene única solución como el problema de las rebajas. Más precisamente, hay muchas posibilidades de patrón de flujo para este sistema.

Una aproximación al significado de solución de un problema en contexto es preguntarles cómo se puede determinar si el patrón $(500, 300, 400, 400, 100)$ es un patrón de flujo del sistema planteado. Este trabajo tiene el objetivo de que los estudiantes, a partir de la experimentación, interpreten qué significa que una tira de números corresponde a una solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Un trabajo que también se puede hacer con este problema es que los estudiantes propongan un sistema de ecuaciones lineales equivalente al sistema anterior. Si no surge un sistema equivalente, se puede escribir uno en el pizarrón:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 800 \\ x_2 + x_4 = 700 \\ 500 = x_4 + x_5 \\ x_1 + x_5 = 600 \\ x_3 = 400. \end{cases} \tag{2.4}$$

Luego, se puede preguntar:

- ¿Por qué la ecuación $1300 = 900 + x_3$ del sistema (2.3) es equivalente a la ecuación $x_3 = 400$ del sistema (2.4)?
- ¿Cómo se puede transformar la ecuación $x_2 + x_4 = 300 + x_3$ de (2.3) en la ecuación $x_2 + x_4 = 700$ de (2.4)?
- ¿El patrón $(500, 300, 400, 400, 100)$ es también un patrón de flujo de (2.4)?

Este trabajo permite reforzar la noción de sistema equivalente como aquel que tiene el mismo conjunto solución que el anterior, pero que tiene la ventaja de encontrar más fácilmente las soluciones del sistema.

Luego, se puede preguntar qué operaciones se pueden hacer para encontrar un nuevo sistema equivalente a los anteriores. Trabajar con las operaciones elementales que transforman una ecuación lineal en otra equivalente y un sistema de ecuaciones lineales en otro equivalente. En este punto, las operaciones que deberían surgir son:

- Se puede despejar de la primera y de la última ecuación de (2.4), la incógnita x_1 y de ahí obtener

$$x_1 = 800 - x_2, \qquad x_1 = 600 - x_5.$$

- Se pueden igualar las ecuaciones anteriores y obtener

$$x_5 = x_2 - 200.$$

- Se puede reemplazar la ecuación anterior en la tercera ecuación del sistema (2.4) y obtener

$$x_4 = 700 - x_2.$$

Con todas estas operaciones, otro sistema equivalente es:

$$\begin{cases} x_1 = 600 - x_5 \\ x_2 = 200 + x_5 \\ x_3 = 400 \\ x_4 = 500 - x_5. \end{cases} \tag{2.5}$$

Una información adicional es que el flujo de tránsito en cada calle no es negativo. Indicar que investiguen en internet por qué se puede afirmar esto. Un flujo negativo en un arco de red que corresponde al flujo que va en dirección opuesta al sentido mostrado en el modelo. Como en este problema el flujo va en un solo sentido, las variables presentadas no pueden ser negativas.

Luego de reflexionar que las incógnitas del problema tienen la restricción de ser números reales no negativos, preguntar qué condiciones deberían cumplir, entonces, las incógnitas que representan el flujo de tránsito en la calle correspondiente. Es productvo trabajar con los estudiantes las restricciones que tiene el problema. Por ejemplo, como $x_4 \geq 0$ y $x_1 \geq 0$, entonces $0 \leq x_5 \leq 500$ y que $0 \leq x_5 \leq 600$. ¿Qué información nos dan estas condiciones?

Luego, preguntar si se les ocurren otros flujos de tránsito que cumplan con estas condiciones. Aquí seguramente surjan muchas respuestas. Se pueden escribir en el pizarrón las infinitas soluciones que tienen, aunque no es el objetivo del problema.

Este sistema de ecuaciones lineales tienen infinitas soluciones dadas por

$$(600 - x_5, 200 + x_5, 400, 500 - x_5, x_5),$$

donde $0 \leq x_5 \leq 500$.

Algunas preguntas adicionales son:

- ¿Es posible que el flujo de tránsito x_1 sea mayor que 100?
- ¿Es posible que el flujo de tránsito x_2 sea mayor que 800?

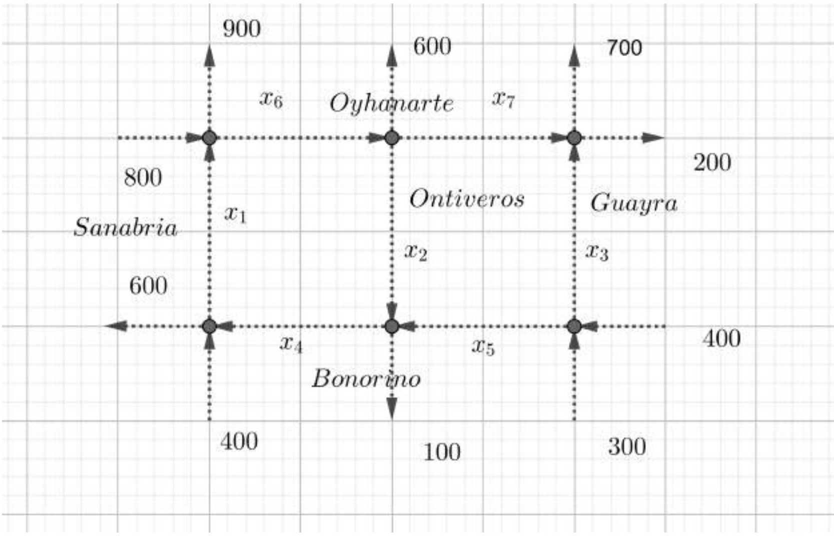
En este flujo vial $0 \leq x_5 \leq 500$, ¿qué implica esta información para x_1 y x_2? Como $x_5 \leq 500$, entonces $x_1 \geq 100$ y $x_2 \leq 700$. Además, como $x_5 \geq 0$, entonces $x_1 \leq 600$ y $x_2 \geq 200$. Se concluye que las restricciones para x_1 y x_2 son:

$$100 \leq x_1 \leq 600 \qquad 200 \leq x_2 \leq 700.$$

Nota: Para un trabajo similar, revisar los ejercicios 2.1.3 y 2.1.4 de la guía de problemas del Libro para el estudiante.

Para terminar se exponen algunas situaciones que pueden surgir si eligen el ejercicio 2.1.4 del *Libro para el estudiante*.

Ejercicio 2.1.1 (Circulación sobre una red vial)**.** *El mapa que aparece a continuación muestra algunas calles de una ciudad. El sentido de la circulación en cada una de ellas está indicado por las flechas.*



El mapa indica el flujo de tránsito que entra o sale en cada calle, en unidades de vehículo por hora y los números mostrados representan el flujo de tránsito promedio a la hora de mayor circulación. Algunas obras de reparación dificultarán la circulación en la calle Bonorino entre Ontiveros y Sanabria ¿Es posible cortar completamente el tráfico allí y atender la demanda que plantea la circulación de vehículos en la hora pico? Si no es posible, ¿qué medida es conveniente adoptar para minimizar el tráfico por esa calle?

En cada intersección el tráfico de entrada debe ser igual al de salida, no aparecen ni desaparecen misteriosamente autos en ninguna esquina de modo que las circulaciones en cada cuadra deben satisfacer ecuaciones que reflejan esta propiedad.

a) *Modelizar el problema a través de un sistema de ecuaciones, indicando claramente cuáles son las incógnitas del problema y qué significa cada ecuación lineal.*

b) *Dar un sistema de ecuaciones lineales equivalente al planteado en el ítem anterior, pero de manera que cada ecuación de dicho sistema aparezca en su mínima expresión.*

c) Explicar cómo se pueden responder las preguntas del problema utilizando el sistema de ecuaciones.

Para lograr la modelización, se necesitan algunas definiciones propias del problema. Una red consiste en un conjunto de puntos (uniones o nodos) y líneas o arcos (ramas), que conectan a algunos nodos o todos los nodos. La dirección del flujo se indica en cada arco y la cantidad (o tasa) de flujo se muestra por medio de una variable. Si un flujo nos dá negativo en un arco de red, corresponde al flujo que va en dirección opuesta al sentido mostrado en el modelo.

El objetivo es comprender cómo es la circulación de vehículos en esa situación vial, para ello se busca calcular cómo puede distribuirse el tránsito en las calles de esta ciudad, de modo de satisfacer las demandas de los vehículos que entran y salen por cada calle. El supuesto básico del flujo de redes es que el flujo que entra a la red es igual al flujo que sale de la red, y que el flujo entrante a un nodo es igual al flujo saliente del nodo. Con todos estos supuestos, los estudiantes deben modelizar el problema del flujo de tránsito a través de un sistema de 6 ecuaciones lineales con 7 incógnitas. Este problema es mucho más difícil que el planteado en el problema modelo. Una posibilidad es trabajar con el propuesto en el problema modelo y dejar este ejercicio para que lo piensen en casa, luego retomar el trabajo la clase siguiente y volver a plantear este ejercicio cuando se vean los métodos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

Surge la pregunta: ¿cómo modelizar esta situación con todos esos supuestos? En este sentido, se deben identificar claramente las variables o incógnitas de este problema concreto. Hay una ecuación por cada nodo. Se introducen variables x_i que representan la cantidad de vehículos por hora que circulan por cada una de las cuadras en la parte de la ciudad que se está considerando, es decir, las variables indican el flujo de tránsito entre determinadas calles.Así, x_1 indica el flujo de vehículos que circulan por hora en Sanabria, desde Bonorino a Oyhanarte, x_2 indica el flujo de vehículos que circulan por hora en Ontiveros, desde Oyhanarte hacia Bonorino, x_3 el flujo de vehículos que circula en Guayra, desde Bonorino hacia Oyhanarte, x_4 el número de vehículos que circula en Bonorino, desde Ontiveros hacia Sanabria, x_5 los vehículos que circulan por Bonorino desde Guayra hacia Ontiveros, x_6 los vehículos que circulan por Oyhanarte desde Sanabria hacia Ontiveros y x_7 los vehículos que circulan en Oyhanarte desde Ontiveros hacia Guayra.

En cada intersección, el tránsito de entrada es igual al de salida, no aparecen ni desaparecen autos en ninguna esquina, de modo que las circulaciones en cada cuadra deben cumplir ecuaciones que reflejan esta propiedad. En este sentido tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 400 + x_4 = 600 + x_1 \\ 800 + x_1 = 900 + x_6 \\ x_2 + x_5 = 100 + x_4 \\ 600 + x_7 + x_2 = x_6 \\ x_7 + x_3 = 700 + 200 \\ 300 + 400 = x_5 + x_3 \end{cases}$$

También surge la duda de si los estudiantes pueden interpretar adecuadamente las preguntas que les plantea el problema. Por ejemplo, para la pregunta acerca de si es posible cortar la circulación en la calle Bonorino entre Ontiveros y Sanabria para atender la demanda que plantea la circulación de vehículos en la hora pico, se les pide que planteen la restricción $x_4 = 0$ y $x_1 \geq 0$. Al intentar contestar la pregunta, se podrá observar que no es posible conseguir una respuesta. Acá se puede trabajar que no siempre las preguntas tienen una respuesta, que a veces se formulan para trabajar con posibles respuestas; por lo que se intentará contestar la siguiente: ¿qué medida es conveniente adoptar para minimizar el tráfico por esa calle? Para ello van a tener que plantear la idea de buscar un mínimo x_4 tal que el valor de x_1 sea positivo.

No se pide en este problema que resuelvan el sistema de ecuaciones lineales y encuentren la solución. Se puede retomar este problema y otros cuando se introduzca el método de eliminación gaussiana. La resolución de este problema permite, además, definir entre todos qué quiere decir resolver un sistema de ecuaciones lineales. La dificultad que presenta es la limitación que tiene los métodos vistos en la secundaria, como los métodos de igualación o sustitución, para encontrar la solución a este problema concreto.

2.2. Interpretación geométrica de sistemas de ecuaciones lineales

El objetivo de este problema modelo es, mediante la exploración con Geogebra, dar una interpretación geométrica de ciertos sistemas de ecuaciones lineales y relacionarla con el tipo de soluciones que tiene.

Problema modelo

Parte 1

1. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, resolver las consignas de abajo.

a) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x - \frac{2}{3}y = \frac{4}{3} \end{cases}$

   a) Escribir en la entrada de la Vista algebraica cada una de las ecuaciones lineales del sistema. Mirar la Vista Gráfica y responder: ¿qué gráfico representa cada una de estas ecuaciones?

   b) ¿Los gráficos se intersecan en algún punto? Si la respuesta es afirmativa, ¿en cuántos puntos lo hacen?

   c) Si los gráficos se intersecan, indicar el o los puntos de intersección de los gráficos que representan las ecuaciones del sistema.

2. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ dx + ey = 3 \end{cases}$$

   a) Crear deslizadores para los coeficientes a, b, c y d del sistema de ecuaciones lineales.

   b) Explorar lo realizado y resolver las consignas.

   - Si el sistema tiene solución, ¿cuántas soluciones tiene? Gráficamente ¿cuándo sucede esto?
   - Si el sistema tiene solución, ¿puede tener solo dos? ¿Por qué?
   - ¿El sistema puede no tener solución? Gráficamente, ¿cuándo puede suceder esto?

   c) Presentar conclusiones basadas en lo trabajado en los ítems anteriores.

Parte 2

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 5x - y = t \\ 10x - 2y = t \end{cases} \tag{2.6}$$

a) Determinar el valor t para que el sistema de ecuaciones lineales tenga solución.
b) Determinar el valor de t para que el sistema de ecuaciones lineales no tenga solución.

En la primera parte de este problema modelo se invita a los estudiantes a que, mediante la exploración con Geogebra, den una interpretación gráfica de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Se espera que los estudiantes trabajen en pequeños grupos con Geogebra y observen regularidades. Lo primero que el docente puede preguntar es qué gráfico representa cada una de las ecuaciones lineales del sistema. En este punto deberían llegar a la conclusión de que un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas representa dos rectas en el plano.

Luego, pedirles que observen qué ocurre con las posiciones de las dos rectas para cada uno de los sistemas del primer ejercicio de la parte 1. En este punto, los estudiantes deberían recordar que dos rectas en un plano o se cruzan en un solo punto, o bien no se cruzan porque son paralelas, o bien se cruzan en todos los puntos ya que las rectas del sistema coinciden.

A partir de estas observaciones y del trabajo con el ítem 2 del problema modelo, se debería llegar a la siguiente conclusión:

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas puede tener solución o no.

- *Si un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene solución única, entonces las rectas que define cada ecuación lineal se intersecan en un punto. Este tipo de sistema se llama* compatible determinado.
- *Si un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas no tiene solución, entonces las rectas que definen cada ecuación lineal del sistema no se intersecan, es decir, son paralelas. Este tipo de sistema se llama* incompatible.
- *Si un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene infinitas soluciones, entonces las rectas que la definen son coincidentes. Este tipo de sistema de ecuaciones lineales se llama* compatible indeterminado.

Por último, proponer a los estudiantes que encuentren los valores de t para el sistema de ecuaciones lineales de la parte 2 del problema modelo. Este problema se puede resolver de dos maneras: una, mirando lo gráficos para cada valor de t y la otra, de manera analítica. Trabajar las resoluciones, mostrando qué conocimientos involucra cada una de estas maneras de llegar a la respuesta.

2.3. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales: el método de eliminación gaussiana

Uno de los problemas fundamentales del Álgebra Lineal es la resolución simultánea de ecuaciones lineales. Este problema modelo abre el trabajo con un método de resolución de tipo algorítmico, llamado el método de eliminación gaussiana.

Querer resolver un sistema de ecuaciones lineales con muchas ecuaciones y muchas incógnitas mediante algún método escolar puede ser demasiado tedioso y hasta se pueden cometer algunos errores de cálculo. El método de eliminación gaussiana permite, mediante operaciones elementales entre las ecuaciones lineales del sistema, transformar el sistema dado en otro sistema escalonado equivalente. Se debe recordar que dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución. La ventaja de obtener este nuevo sistema de ecuaciones lineales es que se pueden hallar más fácilmente las soluciones. Además, permite decidir observando el sistema equivalente hallado si el sistema original tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

Si se opera con este método, se puede ver que no se manipulan las incógnita, sino solo los coeficientes que las acompañan. Es por ello que, antes de usar el método de eliminación, se reescribe el sistema de ecuaciones lineales en forma matricial. Esta matriz, que tiene la información de los coeficientes y los términos independientes, se llama la matriz ampliada. Luego, se manipula dicha matriz hasta llevarla a una matriz ampliada escalonada equivalente, en la que se puedan deducir, fácilmente, las soluciones del sistema original.

En el método de eliminación gaussiana se utilizan tres principios básicos, que no cambian la solución del sistema de ecuaciones lineales, llamadas operaciones elementales por filas:

1. Reemplazar una fila por la suma de sí misma y un múltiplo de otra fila.
2. Intercambiar filas.
3. Multiplicar una fila por una constante distinta de cero.

Problema modelo

1. ¿Cuál es la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales?

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = -5 \\ 3y + z = 7 \\ z = 4 \end{cases}$$

2. ¿Es posible a partir del sistema de ecuaciones lineales escribir otro sistema equivalente, pero escalonado?

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

3. El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + 4z = 2 \\ 3x - 2y + 5z = 6 \\ -x + 3y + z = 1, \end{cases}$$

se puede escribir de manera matricial como

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & |2 \\ 3 & -2 & 5 & |6 \\ -1 & 3 & 1 & |1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se llama *matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales.*

- Determinar las matrices que se obtienen al realizar las siguientes operaciones elementales por filas.
  a) Intercambiar la segunda y la tercera fila. Escribir la nueva matriz M_1.
  b) Multiplicar la segunda fila de M_1 por 2. Escribir la nueva matriz M_2.
  c) Sumar la primera fila y la segunda fila de M_2 y reemplazarla en la segunda fila. Escribir la nueva matriz M_3.
  d) Multiplicar la primera fila de la matriz M_3 por 3 y la segunda fila por 2. Escribir la nueva matriz M_4.
  e) Restar la primera fila y la segunda fila y reemplazarla en la fila 3. Escribir la nueva matriz M_5.
  f) ¿Qué otras operaciones hay que hacer para transformar la matriz M_5 en una nueva matriz escalonada, es decir, que cada fila tenga más ceros que la anterior?
- Reescribir la matriz escalonada hallada como un sistema de ecuaciones lineales y encontrar la solución del sistema. ¿Esta solución es solución también del sistema de ecuaciones lineales original?

4. Resolver las consignas de más abajo para el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 9x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

   (a) Escribir el sistema de ecuaciones lineales en lenguaje matricial indicando la matriz ampliada.
   (b) Resolver el sistema de ecuaciones lineales usando el método de eliminación gaussiana.
   (c) Indicar qué tipo de sistema es según su cantidad de soluciones.

El punto 1 del problema modelo permite observar que si hay un sistema de ecuaciones lineales en forma escalonada, es decir, cada ecuación del sistema tiene una incógnita menos que la ecuación anterior, entonces es más fácil encontrar la solución. En este problema la solución se obtiene haciendo sustituciones hacia atrás. A partir de ejemplos, trabajar con los estudiantes esta idea, teniendo en cuenta que de este trabajo surge una nueva pregunta: ¿cuáles son las operaciones elementales que se pueden hacer para obtener un sistema equivalente a uno dado, pero que sea escalonado?

Luego, proponer a los estudiantes que trabajen con el punto 2, en el que se pide que lleguen a un sistema equivalente. Para resolverlo, se puede trabajar con las operaciones elementales que hacen que un sistema sea equivalente a otro. Mostrar también que si se hacen otras operaciones distintas a estas, la solución del nuevo sistema de ecuaciones lineales es distinta a la del sistema original.

Luego de este trabajo se puede preguntar lo siguiente:

- ¿Qué operaciones elementales hay que hacer para que el sistema del punto 2 se transforme en otro sistema, pero que sea escalonado?
- ¿Cuál es la ventaja de tener un sistema escalonado equivalente?

Luego de todo este trabajo, se puede proponer que observen que para encontrar la solución de un sistema, se manipuló con los coeficientes de las ecuaciones lineales y las operaciones elementales, pero no con las incógnitas. A partir de acá, proponer a los estudiantes que trabajen con el punto 3. El trabajo con este ejercicio ayudará a construir los pasos algorítmicos del método de eliminación gaussiana que permite encontrar la solución del sistema de ecuaciones lineales.

Por último, y a modo de cierre, se sugiere resolver en el pizarrón el punto 4 del problema modelo.

Nota: Los ejercicios 2.3.3 o 2.3.4 del Libro para el estudiante abordan estos contenidos.

2.4. Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales según sus soluciones

Los ejercicios propuestos en este problema modelo son útiles para la argumentación en matemática. Hay que recordar que el uso del método de eliminación gaussiana sirve para hallar más fácilmente la solución o soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, debido a que, entre otras cuestiones, permite llevar el sistema original a otro equivalente, pero con más ceros en sus filas.

Estos ejercicios no involucran solamente el cálculo de las soluciones con este método, sino que permiten la argumentación de determinadas cuestiones matemáticas referidas al tipo de solución o cantidad de soluciones.

Problema modelo

1. ¿Es posible determinar qué tipo de solución tienen los siguientes sistemas de ecuaciones lineales? Si es posible, indicar si tienen infinitas soluciones, una única solución o ninguna.

a)
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas para el siguiente sistema de ecuaciones lineales?

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

a) El sistema tiene solución única.

b) El sistema tiene infinitas soluciones.

c) El sistema no tiene solución.

3. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ 3x - y + kz = 5 \end{cases}$$

   a) Hallar k para el sistema sea incompatible.
   b) Hallar k para que el sistema sea compatible y $z = 1$.
   c) Para el valor hallado en el ítem anterior resolver el sistema.

Este problema modelo tiene como objetivo no solo repasar la técnica de eliminación gaussiana, sino también preguntarse cómo se puede decidir si un sistema tiene solución o no. También permite generalizar lo visto en sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, concluyendo que si se tiene un sistema de ecuaciones lineales, solo puede ocurrir una de estas tres posibilidades:

- Un sistema de ecuaciones lineales puede tener solución única. Se dice que es compatible determinado.
- Un sistema de ecuaciones lineales puede tener infinitas soluciones. Se dice que es compatible indeterminado.
- Un sistema de ecuaciones lineales puede no tener solución. Se dice que es incompatible.

Se les puede proponer a los estudiantes que respondan la pregunta del punto 1. Algunos podrán graficar y decidir si el sistema tiene solución única o no. En este punto, se observa que un sistema puede tener solución única o infinitas soluciones o ninguna solución. Luego de esta interpretación gráfica, se puede preguntar cómo decidir si un sistema tiene solución sin apoyarse en la herramienta computacional. Los estudiantes intentarán escribir la matriz ampliada asociada al sistema y encontrar la matriz escalonada equivalente. Entonces, pedirles que expliquen cómo se puede decidir si el sistema tiene solución a partir de la información de la matriz escalonada. Trabajar en este punto la relación que existe entre el tipo de solución que tiene el sistema y la cantidad de filas no nulas que tiene la matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociada al sistema.

En el punto a) la matriz escalonada equivalente asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & |0 \\ 0 & 2 & -8 & |8 \\ 0 & 0 & -2 & |6 \end{pmatrix}.$$

A partir de esta matriz, ¿qué se puede decir de la solución del sistema de ecuaciones lineales? Proponer a los estudiantes que escriban el sistema de ecuaciones lineales e intenten calcular la solución. Se concluye entre todos, que al estar triangulada, se puede, mediante sustituciones hacia atrás, encontrar la única solución.

La matriz escalonada equivalente al sistema del punto b) es

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 & |2 \\ 0 & 6 & 12 & |6 \\ 0 & 0 & 0 & |0 \end{pmatrix}.$$

A partir de esta matriz, ¿qué se puede decir del sistema de ecuaciones lineales asociado al sistema? En este punto trabajar que el sistema equivalente tiene dos ecuaciones con tres incógnitas, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

Por último, en el ítem c) la matriz equivalente asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & |1 \\ 0 & -1 & 0 & |1 \\ 0 & 0 & 0 & |5 \end{pmatrix}.$$

A partir de esta matriz, se puede preguntar:

- ¿Qué se puede decir del sistema de ecuaciones lineales asociado al sistema?
- ¿Qué quiere decir la última fila de la matriz, $0 = 5$?

Entre todos deberían poder concluir que el sistema no tiene solución.

Definir, si es necesario, el rango de una matriz como la cantidad de filas no nulas y enunciar el Teorema de Frobenius.

Teorema 2.4.1. *Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.*

Se define el rango de A como la cantidad de filas no nulas de la matriz. Notar con $(A|B)$ a la matriz ampliada (formada por los coeficientes y los términos independientes) y A a la matriz de coeficientes.

Puede haber algunas de las siguientes posibilidades:

1. *Si $Rg(A|B) = Rg(A) = n$, entonces el sistema tiene solución única.*
2. *Si $Rg(A|B) = Rg(A) < n$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.*
3. *Si $Rg(A|B) < Rg(A)$, entonces el sistema no tiene solución.*

Luego de este trabajo, se los puede invitar a trabajar con el punto 2 del problema modelo. El sistema de ecuaciones lineales que se presenta tiene todos los términos independientes iguales a cero, por lo que una pregunta que se puede hacer es ¿este sistema de ecuaciones lineales puede no tener solución? Para contestar, los estudiantes se pueden apoyar en Geogebra o intentar darle valores a las ecuaciones del sistema. Deberían poder concluir que una solución del sistema de ecuaciones lineales es $(0,0,0)$. Entonces, se puede preguntar si el sistema tiene otras soluciones o es la única solución.

Este es un buen ejercicio para observar que hay algunas ecuaciones lineales del sistema que no aportan más información. Más precisamente, en este ejercicio se puede observar que el sistema está formado por tres ecuaciones lineales y que las dos últimas ecuaciones son equivalentes a la primera. Los estudiantes deben darse cuenta de que tanto la segunda ecuación como la tercera son múltiplos de la primera; se les puede pedir en este punto que indiquen qué dice esta información con respecto a las soluciones del sistema de ecuaciones lineales. Apoyarse en Geogebra y hacer una interpretación gráfica. Debería quedar institucionalizado que el sistema tiene infinitas soluciones. Más precisamente, las soluciones del sistema verifican la ecuación $x + y + z = 0$.

A partir de este trabajo, se puede concluir que un sistema homogéneo siempre tiene solución: o bien tiene infinitas, o bien solo una.

A modo de cierre, se puede proponer a los estudiantes que resuelvan el punto 3 del problema modelo, en el que deben interpretar para qué valores del parámetro k el sistema o bien tiene solución o bien no tiene solución. Luego se hace una puesta en común con todas las respuestas. Una de ellas es que los estudiantes usen Geogebra para observar que las soluciones del sistema de ecuaciones lineales para el punto a) son $(\frac{22k-2}{7k}, \frac{17k-6}{7k}, \frac{-2}{k})$. Se puede preguntar cuándo tienen sentido estas expresiones. En este punto se puede apelar a conocimientos previos y llegar a la conclusión de que k no puede ser cero. En el ítem b), una situación que puede ocurrir es que los estudiantes triangulen la matriz ampliada asociada al sistema y observen que la matriz resultante es:

$$\left(\begin{array}{cc|r} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 7 & 20 \\ 0 & 0 & -2-k \end{array}\right).$$

Así, se puede observar que este sistema o bien tiene infinitas soluciones o bien no la tiene. En este punto se pueden hacer las siguientes preguntas: ¿Por qué el sistema no tiene solución única? ¿Existirá algún valor de k tal que el sistema resultante tenga solución? ¿Qué condición hay que pedir para que el sistema no tenga solución?

CAPÍTULO

3

Matrices

En este capítulo se presenta la propuesta didáctica pensada para trabajar con la unidad *Matrices*, cuyos temas son:

1. Concepto de matriz y operaciones.
2. Propiedades de las matrices.
3. La inversa de una matriz y sus aplicaciones.
4. Ecuaciones con matrices.

Los objetivos son:

- Usar matrices para organizar determinada información.
- Usar correctamente las operaciones con matrices y de sus propiedades.
- Estudiar del concepto de inversa de una matriz y su importancia.

3.1. Concepto de matriz y sus operaciones

Una matriz es un arreglo rectangular que permite organizar de manera ordenada, en filas y columnas, cierta información.

En el siguiente problema modelo se podrá manipular con diferentes arreglos, que representan determinada información. Está pensado para darles un sentido a las operaciones con matrices, es decir, a la suma, a la multiplicación por un escalar y a la multiplicación de dos de ellas de tamaño conveniente.

Problema modelo

1. El siguiente diagrama describe un conjunto de 4 estaciones entre las cuales puede haber o no comunicación.

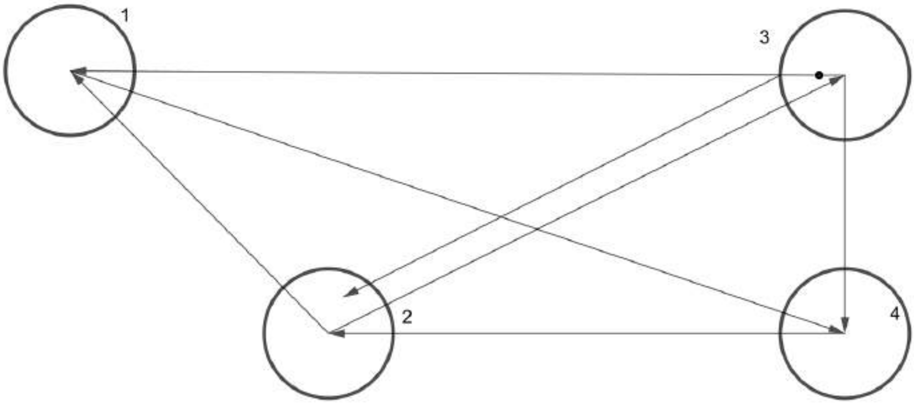


Figura 3.1

Escribir, en una tabla con unos y ceros, la información que describe las posibles comunicaciones directas entre las estaciones. En la tabla, el 1 significa que hay comunicación de una estación a otra y el 0 que no la hay. La comunicación en una misma estación es cero.

2. Un fabricante realiza tres modelos de un producto: A, B y C. Algunas partes se elaboran en la fábrica 1 y se terminan en la fábrica 2.
   En las siguientes tablas se muestran los costos de manufactura y de embarque para los modelos A, B y C correspondientes a las fábricas 1 y fábricas 2, respectivamente.

Fábrica 1	Costo de manufactura	Costo de embarque
Modelo A	32	40
Modelo B	50	80
Modelo C	70	20

Fábrica 2	Costo de manufactura	Costo de embarque
Modelo A	40	60
Modelo B	50	50
Modelo C	130	20

   ¿Cuáles son los costos totales de manufactura y embarque de cada modelo?

3. Esta tabla muestra los precios de tres productos almacenados en una bodega

18,95	14,75	8,6

. Se decide vender estos artículos un 20 % más baratos.

a) Escribir una tabla que presente el descuento de cada artículo.
b) Escribir una tabla que presente los nuevos precios de cada artículo.

4. En un instituto se dan los cursos de Inglés 1, Inglés 2 e Inglés 3. La siguiente tabla muestra la cantidad de horas de clases, de tutorías y de guardias que debe cumplir, semanalmente, cada profesor, según el nivel de Inglés que dicte.

Materia	horas de clase	horas de guardia	horas de tutoría
Inglés 1	20	5	3
Inglés 2	18	6	5
Inglés 3	22	1	3

El instituto les paga a los profesores 12 dólares por cada hora de clase, 3 dólares por cada hora de guardia y 6 dólares por cada hora de tutoría.

a) ¿Cuánto paga el instituto, por semana, por la enseñanza de cada nivel?
b) Si en el instituto hay 5 profesores para Inglés 1, 4 profesores para Inglés 2 y 6 profesores para inglés 3, ¿cuánto paga por las clases, por las guardias y por las tutorías, semanalmente?
c) ¿Cuánto le cuesta al instituto, por semana, enseñar los tres niveles de Inglés con esa cantidad de profesores?

Este problema modelo tiene dos objetivos, el primero es mostrar la necesidad de construir una tabla o matriz para ordenar cierta información y, el segundo, que a partir de estos arreglos matriciales se puede operar y obtener nueva información expresada en nuevas tablas.

Se puede trabajar con los estudiantes el punto 1 del problema modelo. La información puede estar dada en formato de tabla o de matriz.

Luego se puede hacer preguntas sobre qué representa cada elemento de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- ¿Qué representa cada fila y cada columna de la matriz?
- ¿Por qué en la fila 2 columna 1 hay un uno pero en la fila 1 columna 2 hay un cero?
- ¿Por qué en la diagonal de la matriz hay siempre ceros?

Se puede adelantar que el tamaño de esta matriz, al tener cuatro filas y cuatro columnas, es de 4×4.

Luego de este trabajo, se les propone a los estudiantes que, en grupos, resuelvan el punto 2. Este problema involucra suma de matrices, pero escritas en formato de tablas. Un problema que puede surgir es que los estudiantes no sepan cómo encontrar los costos totales. Si eso ocurre, preguntar, por ejemplo: si quisieran conocer cuáles son los costos totales de manufactura correspondientes a ambas fábricas para el modelo A, ¿cómo los encontrarían? ¿Y si quisieran conocer todos los costos totales de manufactura para cada uno de los modelos?

A partir de estas preguntas, los estudiantes construyen la idea de sumar las tablas, suma que permite determinar más rápidamente la información pedida.

Se puede decir que ambas tablas corresponden a matrices que tienen tres filas y dos columnas. La suma de las tablas devuelve otra tabla o matriz del mismo tamaño, pero que da la información de los costos totales para cada modelo.

A partir de este trabajo es posible definir dos conceptos: matriz y una de las primeras operaciones, la suma de matrices del mismo tamaño.

Respecto del punto 3, los estudiantes pueden tener dificultades en interpretar qué significa el descuento del 20 % en un producto que sale A pesos. Si eso sucede, dar ejemplos de la vida cotidiana, haciéndoles recordar lo trabajado en el curso de preparación y lo visto en la escuela secundaria. Trabajar con los significados de precio neto, descuento y precio actual.

Para contestar la pregunta del punto 3, los estudiantes deben calcular el 20 % de descuento de un artículo que vale A pesos. En este sentido, el descuento es $0,2 \cdot A$. Luego, el precio actual es $A - 0,2 \cdot A = 0,8 \cdot A$.

Cuando encuentren todos los descuentos y los precios actuales de los tres productos, preguntar: ¿cómo se puede organizar la información si son los precios de un supermercado que tiene más de 1000 artículos con precios distintos? En este punto, se pueden introducir matrices y la multiplicación de un escalar por una matriz.

Por último, se pide a los estudiantes que resuelvan el punto 4 del problema modelo. En ese punto se hacen determinadas preguntas referidas al costo de cada curso por profesor, cantidad de clases totales por cada curso y costo total de todos los cursos según el total de profesores por curso. Las respuestas se pueden obtener sin necesidad de que los estudiantes tengan que escribir matrices ni tablas; sin embargo, en la institucionalización de todo lo trabajado, se puede introducir el uso de matrices, mostrando la optimalidad para operar con ellas y poder contestar nuevas preguntas.

Este problema es un buen ejercicio para introducir la multiplicación de matrices en contexto.

Se puede introducir la multiplicación de matrices una vez que los estudiantes hayan respondido las preguntas planteadas en el problema. Por ejemplo, la pregunta de cuánto le cuesta al instituto enseñar de cada nivel de Inglés por profesor, pueden contestarla haciendo las siguientes cuentas:

$$20 \cdot 12 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 273.$$

Así, al instituto le cuesta 273 dólares por profesor para enseñar Inglés 1.

De la misma manera, si quieren calcular lo que le cuesta enseñar Inglés 2, harán:

$$18 \cdot 12 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot 6 = 264.$$

Por lo tanto, al instituto le cuesta 264 dólares enseñar Inglés 2.

Por último, le cuesta $22 \cdot 12 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 285$ dólares por profesor enseñar Inglés 3.

Una posible pregunta para introducir las matrices, es: Imaginen que son 50 niveles de Inglés y les hacen la misma pregunta. ¿Se les ocurre una manera más rápida de hacer estas cuentas sin perderse ni repetir resultados?

A continuación se puede introducir la escritura de matrices. En el problema hay tres matrices involucradas:

- La matriz M, de tamaño 3×3, que indica las horas de clase, de guardia y de tutoría para cada uno de los tres niveles de Inglés por profesor.
- La matriz C, de tamaño 3×1, que indica lo que paga el instituto por cada hora de clase, de guardia y de tutoría. Más precisamente,

$$C := \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- La matriz P, de tamaño 1×3, que indica la cantidad de profesores asignados para cada uno de los niveles de Inglés. Más precisamente,

$$P := \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

A partir de estas matrices, los estudiantes, con las cuentas realizadas, deberían concluir que se necesita la información de las matrices M y C para responder la pregunta.

El docente, en este punto, debería explicar cómo se multiplican estas matrices y el orden para multiplicar sus elementos. Existen, en principio, dos modos de multiplicar: o bien $M \cdot C$ o bien $C \cdot M$. La segunda manera no tiene sentido, ya que C es de tamaño 3×1 y M es de tamaño 3×3. Matemáticamente, entonces, tiene sentido multiplicar $M \cdot C$ y representa una matriz de tamaño 3×1. Pero en el contexto del problema, ¿qué significa multiplicarlas? ¿Cómo multiplicarlas?

Por ejemplo, la fila 1 de M indica las horas de clases, de guardias y de tutorías de Inglés 1 y C indica lo que se paga cada hora de clase, de guardia y de tutoría, respectivamente. Por lo tanto tiene sentido multiplicar la fila 1 de M por la última columna de C, es decir:

$$\begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 20 \cdot 12 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 273.$$

Este número expresa que al instituto le cuesta 273 dólares enseñar Inglés 1, de acuerdo con la cantidad de horas de clases, de guardias y de tutorías que asigna.

De la misma manera, si se multiplica la fila 2 de la matriz M por C se obtiene lo que le sale enseñar Inglés 2, es decir:

$$\begin{pmatrix} 18 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 18 \cdot 12 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot 6 = 264.$$

Por último, si se multiplica la fila 3 de M por C, se obtiene lo que le sale al Instituto enseñar Inglés 3:

$$\begin{pmatrix} 22 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 22 \cdot 12 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 285.$$

Así la información de lo que cuesta enseñar cada nivel de Inglés se puede resumir en una matriz:

$$M \cdot C = \begin{pmatrix} 273 \\ 264 \\ 285 \end{pmatrix}.$$

Otra información que piden determinar es cuáles son los números totales de clases, de guardias y de tutorías. Nuevamente, se puede retomar el trabajo de los estudiantes que hicieron los cálculos sin usar matrices y preguntar cómo se puede contestar la pregunta usando las matrices M, C y P.

Lo primero que hay que observar es que se necesita la información de la matriz M, que indica la cantidad de horas de clase, de guardia y de tutoría, y la matriz P, que indica la cantidad de profesores asignados a cada nivel de Inglés.

Nuevamente, hay que multiplicar ambas matrices. Matemáticamente, no tiene sentido calcular $M \cdot P$, ya que M es de tamaño 3×3 y P es de tamaño 1×3. Así, la operación matricial que hay que hacer es $P \cdot M$, pero ¿tiene sentido esta operación en el contexto del problema?

Hay que notar lo siguiente:

$$P \cdot M = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz P indica la cantidad de profesores para Inglés 1, Inglés 2 e Inglés 3. Las columnas de M indican la cantidad de horas de clases, de guardias y de tutorías, respectivamente, por profesor para cada uno de los niveles de Inglés.

Así, si se multiplica P por la primera columna de M, es decir,

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 22 \end{pmatrix} = 5 \cdot 20 + 4 \cdot 18 + 6 \cdot 22 = 304,$$

se obtiene el número de horas de clases en total de los tres niveles de Inglés.

De la misma manera P por la segunda columna de M, es decir,

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 1 = 55,$$

da la cantidad de horas de guardia en total de los tres niveles de Inglés.

Por último, P por la tercera columna de M da la información de la cantidad de horas de tutoría en total de los tres niveles de Inglés.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 3 = 53,$$

La información obtenida de la cantidad de horas totales de clases, guardias y tutorías se puede resumir en la siguiente matriz de tamaño 1×3:

$$P \cdot M = \begin{pmatrix} 304 & 55 & 53 \end{pmatrix}.$$

Para todos estos cálculos habría que apoyarse en las cuentas que hicieron los estudiantes, mostrando que esta manera de operar permite contestar preguntas cuando los datos son mucho más grandes. Mostrar en este punto la importancia de organizar la información en matrices de datos.

Para finalizar, proponer a los estudiantes que hagan un trabajo similar con la última pregunta del punto 4. Allí se pide averiguar cuánto le cuesta en total al instituto enseñar los tres niveles de Inglés, con esa cantidad de horas para cada nivel y con la cantidad de profesores asignados a cada uno de ellos. Apoyándose en el trabajo realizado por los estudiantes, se puede preguntar: ¿cómo se puede contestar esta pregunta a partir de la multiplicación de matrices?

El cálculo para contestar la pregunta es el siguiente:

$$(P \cdot M) \cdot C. \tag{3.1}$$

Si no surge este cálculo, el docente puede escribir en el pizarrón esta operación matricial y preguntar si es correcta, y qué significan estos productos en el contexto del problema.

En este punto, se observa que $P \cdot M$ es una matriz de tamaño 1×3 que indica el número de horas totales de clases, de guardias y de tutorías para los tres niveles de Inglés, y la matriz C indica lo que cuesta cada hora de clase, de guardia y de tutoría, y es de tamaño 3×1. Así, $(P \cdot M) \cdot C$ es un número, matriz de tamaño 1×1, que indica lo que le sale en total dar clases de Inglés.

Luego, se puede preguntar si hay otra manera de resolverlo a partir de matrices. Si no surge, escribir en el pizarrón:

$$P \cdot (M \cdot C) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 273 \\ 264 \\ 385 \end{pmatrix} = 5 \cdot 273 + 4 \cdot 264 + 6 \cdot 285 = 4131. \tag{3.2}$$

Luego, preguntar qué representa la cuenta anterior. Vale observar que en la matriz P se encuentra la cantidad de profesores destinados para cada uno de los niveles de Inglés y la matriz $M \cdot C$ indica la cantidad de dinero destinada en total para cada uno de los niveles, por profesor. Así si se opera $P \cdot (M \cdot C)$, se tiene la información de lo que le sale en total al instituto enseñar los tres niveles de Inglés.

Otra posible pregunta es: ¿por qué las cuentas (3.1) y (3.2) dieron el mismo número? Esta pregunta motiva una propiedad de los números reales que se extiende en el conjunto de matrices; es decir $P \cdot (M \cdot C) = (P \cdot M) \cdot C$.

Nota: Para un trabajo similar se pueden elegir los ejercicios 3.1.3, 3.1.5 o 3.1.6 del Libro para el estudiante.

3.2. Propiedades de las matrices

El siguiente problema involucra algunas propiedades de las operaciones vistas.

Problema modelo

1. Dadas las matrices $A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ y $B := \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, resolver las siguientes actividades:
   - ¿Qué tamaño tiene la matriz $5B$? Indicar cada uno de sus elementos.
   - Calcular B^T, ¿qué relación hay entre B y $(B^T)^T$?
   - Calcular $A - B^T$.
   - ¿Cuánto vale $A + (-A)$?
   - ¿Es posible calcular AB y BA? Si es posible, se puede decir que son matrices iguales.
   - ¿Cuánto vale $(AB)^T$? ¿Existe una relación entre esta matriz y la matriz $B^T A^T$?

   Los cálculos pueden resolverse con Geogebra, utilizando la Vista Cas. Para escribir la matriz A tenemos que usar $A := \{\{2, -3, 5\}, \{6, -5, 4\}\}$. A partir de los cálculos, conjeturar propiedades referidas a las operaciones con matrices, es decir, igualdades que valen para todas las matrices de tamaño adecuado.
2. Sean las matrices $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ y $B := \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Encontrar la segunda columna de AB y la primera fila de AB sin hacer todas las multiplicaciones para hallar AB.
3. Usando Geogebra, decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas, y justificar las decisiones:
   - Hay dos matrices A y B de tamaño 2×2. Si la primera y segunda columna de B son iguales, entonces la primera y segunda columna de AB son iguales.
   - Si A y B son dos matrices de tamaño 2×2, entonces $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$.

- Sean A, B dos matrices de tamaño 2×2. Entonces se satisface la siguiente igualdad $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

4. Explorar con Geogebra y buscar matrices 2×2 que cumplan:
   - $A^2 = I$.
   - $B^2 = 0$, pero $B \neq 0$, donde 0 corresponde a la matriz nula.
   - $AB = AC$, pero $B \neq C$.

La exploración de este problema modelo permite determinar ciertas propiedades de las matrices con la suma y producto.

En su primer punto, los estudiantes pueden conjeturar ciertas propiedades. Si no pueden hacer las cuentas, se les pide que resuelvan con Geogebra. Luego, se puede preguntar:

- ¿Cuánto vale $A + (-A)$? ¿Y $B + (-B)$?
- ¿Se puede decir qué matriz resulta cuando se realiza la operación $C+(-C)$ para cualquier C?

La respuesta es que siempre da la matriz nula.

Otra propiedad que debería surgir del trabajo hecho es que

$$(B^T)^T = B,$$

para cualquier matriz B. Si esto no surge, se puede sugerir que hagan otros ejemplos.

De los cálculos se debería poder conjeturar que no siempre AB es igual a BA, aunque ambas operaciones estén bien definidas. Se puede preguntar también si se les ocurre algún ejemplo de matrices A y B, de manera que la operación AB esté bien definida, pero BA no esté bien definida.

Por último, otra propiedad que surge del trabajo de exploración y cálculo es que siempre se cumple que

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

siempre que se pueda hacer la multiplicación AB.

Luego de este trabajo, los estudiantes pueden resolver el punto 2, pero sin realizar todas las multiplicaciones para contestar la pregunta. Si hacen todas las multiplicaciones, se puede preguntar:

- Si hay una matriz A con n filas y m columnas, y una matriz B de m filas y s columnas, ¿cómo se pueden calcular todos los elementos de la segunda columna de AB?
- ¿Cómo se pueden calcular los elementos de la primera fila de AB?

Los últimos dos puntos del problema modelo involucran un tipo de trabajo que, probablemente, estuvo ausente en la escuela secundaria. Aprender a argumentar determinada afirmación es importante no solo en el ámbito de la matemática, sino también en el ámbito de la ingeniería. Para hacer este trabajo, se puede empezar proponiendo proposiciones sencillas de las que se pueden afirmar si son verdaderas o falsas. Mostrar en este sentido cómo justificar que una proposición es verdadera y cómo que es falsa.

Por ejemplo, se puede proponer los siguientes ejercicios sencillos para introducir estas cuestiones:

Ejercicio 3.2.1. *Argumentar por qué la siguiente afirmación es falsa:*

Todo número real elevado al cuadrado es positivo.

Esta afirmación es falsa, porque no se cumple para todos los números reales. En efecto, 0 es un número real que, cuando se lo eleva al cuadrado, resulta $0^2 = 0$, que no es positivo.

Ejercicio 3.2.2. *Dar una justificación de por qué la siguiente afirmación es verdadera:*

Todo número entero impar elevado al cuadrado también es impar.

Esta afirmación es verdadera. Para dar una justificación deberían elegir cualquier número entero impar, elevarlo al cuadrado y que resulte impar. En efecto, dado $2k+1$ cualquier número entero impar, $(2k+1)^2 = 2(2k^2+2k)+1$, que resulta también impar.

A partir de esta breve introducción, se puede formalizar que, para que una afirmación sea verdadera, debe valer para todos los casos que se enuncian en dicha afirmación, y que basta un solo caso que no cumpla esa afirmación para justificar que es falsa.

Para el primer ítem del punto 3, los estudiantes pueden explorar con ejemplos en Geogebra. Al hacer este trabajo, van a poder conjeturar que resulta verdadera. Intentar hacer una demostración entre todos para justificar la validez de la afirmación. A continuación se da una posible demostración.

Sea

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 & C_1 \end{pmatrix},$$

donde cada $A_i = (a_{i1}, a_{i2})$ corresponde la fila i-ésima de la matriz A, para cada $i = 1, 2$ y $C_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$. Como las columnas 1 y 2 de la matriz B son iguales, es decir, $C_1 =$

C_2, entonces multiplicar cada fila de A por la primera columna de B es lo mismo que multiplicar cada fila de A por la segunda columna de B. Los números de estas multiplicaciones corresponden a los valores de la primera y segunda columna de AB. Más precisamente,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_1C_1 & A_1C_1 \\ A_2C_1 & A_2C_1 \end{pmatrix}.$$

Para la segunda afirmación del punto 3, los estudiantes pueden dar ejemplos en Geogebra y mostrar que no se cumple la igualdad matricial. Hay numerosos ejemplos que prueban que la afirmación es falsa. Uno de ellos es el siguiente.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$(A - B)(A + B) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}, \quad A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -2. \end{pmatrix}$$

Se puede preguntar: ¿por qué la igualdad $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ vale para todos los números reales pero, en cambio, no vale para matrices?

Para el último ítem del punto 3 se hace un trabajo similar. La afirmación es verdadera. Se puede preguntar: ¿por qué no se puede decir que $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Finalmente, se puede proponer como tarea que, mediante la exploración con Geogebra, encuentren ejemplos que satisfagan cada uno de los ítems del punto 4. En la clase siguiente se puede trabajar con esos ejemplos.

3.3. La inversa de una matriz y sus aplicaciones

Este problema modelo tiene como objetivo estudiar la inversa de una matriz cuadrada y su importancia para decidir si un sistema tiene solución o no.

Problema modelo

1. Dada la matriz $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$,

   ¿es posible encontrar una matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

   ¿Sucede lo mismo con la matriz $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$?

2. Encontrar una matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cuando $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.
   Se dice que una matriz A de tamaño $n \times n$ es inversible si existe una matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$, donde I es la matriz identidad de tamaño $n \times n$. Si esto ocurre, notar a B con A^{-1} y se dice que A^{-1} es la inversa de A.
3. Se sabe que la inversa de una matriz es $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. ¿Es posible calcular dicha matriz?
4. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ 3x + 4z = b \\ x + y = c \end{cases}$$

   a) Determinar si tienen solución única o no para cada $a, b, c \in \mathbb{R}$.
   b) Encontrar las soluciones del sistema de ecuaciones en función de cualquier $a, b, c \in \mathbb{R}$.
5. Usando Geogebra, dar ejemplos que muestren que la siguiente afirmación es falsa: *Si A y B son dos matrices de tamaño 2×2 inversibles entonces $A + B$ es inversible.*
6. En una actividad de campo, un estudiante lanza varias veces una pelota. Sus compañeros, con un sensor de movimiento, toman los datos que aparecen registrados en la siguiente tabla. En la primera columna de la tabla se encuentra la distancia que la bola ha viajado horizontalmente ,y en la segunda columna, la altura sobre el nivel del suelo, ambas medidas en pies.

Distancia horizontal (pies)	Altura (pies)
0	5
20	23
40	47
100	55
120	53
140	47
160	37
200	5

- Definir las variables del problema e identificar las restricciones sobre los datos.
- Ubicar los puntos dados en el plano cartesiano. Llamar x a la distancia horizontal e y a la altura que alcanza la pelota. ¿Tiene sentido unir los puntos mediante una línea continua?¿Por qué?
- Suponer que la ecuación que modela la trayectoria de la pelota está dada por $y = ax^2 + bx + c$. Seleccionar tres puntos cualesquiera de la tabla y plantear un sistema de ecuaciones lineales para determinar a, b, c.
- ¿Cuál es la matriz de coeficientes asociada al sistema planteado anteriormente? ¿Dicha matriz es inversible?
- Si la respuesta del ítem anterior es afirmativa, intentar encontrar la solución del sistema a partir de la inversa de la matriz de coeficientes asociado al sistema.
- Buscar otra manera de encontrar la solución del sistema.
- Validar algunos de los datos de la tabla con la ecuación encontrada.
- ¿ Qué representa el dato $(100, 55)$?

Este problema involucra varios aspectos de la inversa de una matriz, desde su definición y cómo se calcula, hasta las aplicaciones de dicho concepto a sistemas de ecuaciones lineales.

El primer punto motiva a los estudiantes a encontrar la inversa de una matriz, es decir, otra matriz B del mismo tamaño que A tal que $A \cdot B = I$, donde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se puede empezar proponiendo a los estudiantes que encuentren una matriz B que satisfaga que $A \cdot B = I$, para cada uno de los casos de la matriz A. Si no saben cómo seguir, se les puede pedir que escriban una matriz genérica $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Los estudiantes, usando los conocimientos que tienen sobre sistemas de ecuaciones lineales e igualdad de matrices, deberían poder llegar a la conclusión de que, para encontrar B, deben resolver de manera simultánea dos sistemas de ecuaciones lineales. Más precisamente, dada la primera matriz A, para encontrar B deben encontrar los valores de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tales que se cumplan simultáneamente

1. $$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ -2a + 3c = 0 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 2b + d = 0 \\ -2b + 3d = 1 \end{cases}$$

Dejar que los estudiantes encuentren esas soluciones. Luego, hacer las siguientes preguntas:

- ¿Estos sistemas tienen solución única?
- ¿Cuál es la solución de estos sistemas?
- ¿Qué relación tienen las soluciones de los dos sistemas con la matriz B?

Para la segunda matriz A, planteando los sistemas, los estudiantes deberían llegar a que, para encontrar B, deben encontrar $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que se satisfagan simultáneamente

1. $$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ -4a - 2c = 0 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 2b + d = 0 \\ -4b - 2c = 1 \end{cases}$$

Algunas posibles preguntas que permiten ordenar el debate, pueden ser:

- ¿Es posible encontrar una solución para cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales? Los estudiantes deberían responder que no es posible, que ambos sistemas no tiene solución.
- ¿Qué relación tiene esto con la matriz B buscada?

Luego de este trabajo, se da la definición de matriz inversa.

En estos ejemplos, $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ es una matriz inversible, con inversa $B = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{-1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

En cambio la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

A continuación, se puede mostrar a los estudiantes un método para encontrar la inversa de una matriz usando el método de Gauss–Jordan. Explicar este método a partir de las dos matrices propuestas. Por ejemplo, para encontrar la inversa de la primera matriz A, debían resolver, simultáneamente, los siguientes sistemas.

1. $$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ -2a + 3c = 0 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 2b + d = 0 \\ -2b + 3d = 1 \end{cases}$$

Ambos sistemas tiene la misma matriz de coeficientes, lo que cambia es la matriz de términos independientes. Así, para encontrar B tal que $A \cdot B = I$ usando operaciones elementales hay que transformar la matriz $(A|I)$ en $(I|B)$. Si esto es posible, entonces A es inversible y la inversa es B; si no es posible, entonces A no tiene inversa.

Mostrarles también que usando la vista Cas de Geogebra se puede calcular la inversa de la matriz A usando el comando Inversa(A). En este punto, una pregunta orientadora puede ser: ¿qué muestra Geogebra cuando se intenta encontrar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$?

A modo de repaso, proponer que intenten encontrar la inversa de la matriz A del punto 2 usando Geogebra y el método de Gauss-Jordan.

Para resolver el punto 3, los estudiantes tienen como dato la inversa de una matriz, es decir, tienen B, pero desconocen la matriz A, tal que $A \cdot B = I$. Si no saben cómo resolver este ejercicio, pedirles que vuelvan a leer todo lo trabajado en el punto 1. Los estudiantes deberían concluir que, para encontrar A, tienen que hacer un trabajo similar al hecho en el punto 1 del problema modelo.

A partir de este trabajo, se puede concluir lo siguiente:

Si una matriz cuadrada A tiene inversa, esta es otra matriz B del mismo tamaño, que satisface que $A \cdot B = I$. Más aún, esta matriz B es única. Además B también tiene inversa, que es la matriz A. Por lo tanto, se puede decir que la inversa de la inversa de A es A, es decir, $(A^{-1})^{-1} = A$

Los primeros tres ejercicios del problema modelo tuvieron como objetivo construir la definición de inversa de una matriz cuadrada y mostrar cómo se calcula dicha matriz. Los siguientes puntos del problema tienen como objetivo mostrar la importancia de la inversa de una matriz cuadrada.

Proponer a los estudiantes que resuelvan el punto 4. Se pueden apoyar en lo visto anteriormente y escribir la matriz ampliada asociada al sistema, e intentar triangular usando el método de eliminación. En ese sentido,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & |a \\ 3 & 0 & 4 & |b \\ 1 & 1 & 0 & |c \end{pmatrix},$$

y por operaciones elementales entre filas, se sigue que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & |a \\ 0 & 6 & -7 & |3a-b \\ 0 & 0 & -1 & |6c-3a-b \end{pmatrix}.$$

A partir de estas cuentas, se puede preguntar:

- ¿Este sistema siempre va a tener solución única?
- Si es así, ¿cuál es la solución?

A partir de este trabajo, proponer el siguiente ejercicio:

Ejercicio 3.3.1. *Dados una matriz A con n filas y n columnas que resulta inversible, y un sistema de ecuaciones lineales de la forma*

$$AX = B,$$

donde B es una matriz con n filas y una columna, ¿cómo se pueden encontrar todas las soluciones X del sistema?

Este ejercicio motiva el siguiente teorema, que pueden construir entre todos.

Teorema 3.3.2. *Sean A una matriz de tamaño $n \times n$ y B una matriz de tamaño $n \times 1$. Sea el sistema de ecuaciones lineales*

$$AX = B.$$

El sistema tiene solución única si y solo si A es inversible. En este caso la solución es $X = A^{-1}B$.

En este caso la matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A partir de esto se puede preguntar: si están en las condiciones del teorema, pero tienen un sistema homogéneo, ¿cuáles son las soluciones del sistema? Luego, el docente retoma el punto 4 y propone que los estudiantes lo resuelvan usando este teorema. Mostrar en este punto la economía del teorema para encontrar soluciones de sistemas con la misma cantidad de ecuaciones que incógnitas, siempre que la matriz de coeficientes sea inversible.

En efecto, como A es inversible y la inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 8 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix},$$

tenemos que la solución es

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

para cualquier $a, b, c, \in \mathbb{R}$.

Así conseguimos la solución de cada sistema lineal, sin necesidad de resolverlo para cada valor de a, b, c.

Por último, se les puede proponer a los estudiantes que exploren con Geogebra y determinen la falsedad de la afirmación del punto 5. Después, se puede trabajar con todas las respuestas y argumentaciones dadas.

Dejar de tarea el punto 6 y retomarlo la clase siguiente. Este último punto permite repasar todos los conceptos vistos referidos a sistemas y matrices. Este tipo de problema será trabajado en materias en las que se estudie la noción de función y de función cuadrática, y muestra los distintos registros que se pueden utilizar para dar cierta información: una tabla, un gráfico o una fórmula. Se puede hacer un trabajo con las distintas representaciones, mostrando las ventajas de una por sobre otra. Algunas posibles preguntas para la clase son:

- ¿Por qué los puntos graficados se pueden unir?
- ¿Cuál es la altura máxima? ¿A qué distancia se produce?
- ¿Qué ventajas y desventajas hay en los registros dados en el problema?¿ A qué altura está la pelota cuando la distancia es 110?

El punto crítico es que, para encontrar la fórmula que modela la trayectoria de la pelota, es decir a, b, c tal que $y = ax^2+bx+c$, es necesario relacionarlo con un sistema de ecuaciones lineales. Para ello, los estudiantes tienen que tomar algunos puntos de la tabla y encontrar las ecuaciones lineales que forman el sistema de ecuaciones lineales. Algunas preguntas son las que siguen:

- ¿Cómo se traduce en la fórmula $y = ax^2 + bx + c$ la información de que a distancia 0 la altura es de 5?
- ¿Por qué son necesarios tres puntos para encontrar la fórmula $y = ax^2+bx+c$?

Una vez encontrado el sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, se puede repasar el concepto de matriz de coeficientes asociada a un sistema de ecuaciones lineales y la noción de inversa de una matriz. Algunas posibles preguntas en este sentido son:

- ¿Por qué la matriz de coeficientes asociada al sistema es inversible?
- ¿Se puede calcular la solución del sistema mediante la información de la inversa de la matriz de coeficientes?
- ¿Por qué la solución del sistema es única? ¿Cómo se traduce esa información en la fórmula que modela la trayectoria de la pelota?

Nota: Para trabajar con aplicaciones de la matriz inversa, elegir los ejercicios 3.3.4 y 3.3.5 del Libro para el estudiante.

3.4. Ecuaciones con matrices

Para terminar con la unidad de matrices, se propone este problema modelo, que trabaja con ecuaciones con matrices.

Problema modelo

Dados $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcular la matriz X de tamaño 2×2 en cada caso:

a) $A \cdot X = B$

b) $A \cdot X = X \cdot A$

c) $A + A \cdot X = B$

d) $2 \cdot X + A \cdot X = I$, donde I es la identidad de tamaño 2

Proponer que los estudiantes resuelvan este problema a partir de todo lo visto. En este punto, pueden o bien plantear una matriz genérica e intentar encontrar los elementos de dicha matriz, usando igualdad de matrices, o bien trabajar con la inversa de una matriz y despejar X. A modo de cierre de la unidad, se puede trabajar con cada una de las propuestas de los estudiantes, repasando todos los conceptos vistos.

CAPÍTULO

4

Determinantes

En este capítulo se trabajan los contenidos de la unidad *Determinantes.* Como en los anteriores, los problemas modelo introducen cada tema de la unidad. Una posibilidada es pedir a los estudiantes que, en pequeños grupos, discutan las preguntas de los problemas modelo e intenten escribir las argumentaciones o aproximaciones a la resolución. Luego, el docente introducirá los conceptos que quiere enseñar, mostrando las limitaciones de los contenidos previos.

Los temas de esta unidad son:

1. Definición del determinante de una matriz.
2. Propiedades del determinante.
3. Aplicaciones del determinante.

Y sus objetivos son:

- Estudiar las maneras de calcular la función determinante.
- Calcular la función determinante de una matriz cuadrada a partir de sus propiedades.
- Aplicar el concepto de la función determinante para decidir si un sistema de ecuaciones lineales tiene solución o no.

4.1. Definición del determinante de una matriz

El primer problema modelo se diseñó para introducir la definición del determinante de una matriz cuadrada y luego el determinante de una matriz de cualquier orden. Mediante cálculos con matrices de orden pequeño, se espera que los estudiantes logren conjeturar que si una matriz tiene determinante distinto de cero, entonces es inversible. Esta propiedad cobra mucha importancia ya que, si se quiere decidir de antemano que una matriz cuadrada es inversible, no se necesita empezar a triangular para tomar esa decisión.

Problema modelo

1. Sea el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   - ¿Qué condiciones tienen que cumplir $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ para que el sistema tenga solución única?
   - Proponer una matriz que haga que el sistema tenga solución única y una matriz que haga que el sistema no tenga solución.
2. Decidir si cada una de las siguientes matrices es inversible:
$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix},$$
   ¿Cuánto vale el determinante de cada una de las matrices dadas? Encontrar una relación entre el determinante y la inversa de una matriz.
3. Usando el desarrollo por cofactores, calcular el determinante de la siguiente matriz:
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
   desarrollándola por la primera fila y la tercera columna. A partir de lo trabajado, ¿el cálculo del determinante depende de la elección de la fila o de la columna?
4. ¿Cuánto vale el determinante de $A := \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$?
   Conjeturar una propiedad sobre la base del cálculo hallado.

Este problema modelo tiene como objetivo introducir el concepto de determinante de una matriz cuadrada.

Proponer a los estudiantes que trabajen con el punto 1 de este problema modelo. Ellos pueden intentar triangular la matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales y encontrar condiciones para que esto ocurra.

Otra respuesta es que relacionen la existencia de solución única del sistema de ecuaciones lineales con la de la inversibilidad de la matriz de coeficientes. Para decidir si dicha matriz es inversible, deben poder encontrar condiciones para los valores a, b, c, d.

Por último, se les puede pedir que utilicen Geogebra para encontrar la inversa de la matriz de coeficientes. En este punto, preguntar qué condiciones deben cumplirse para que exista esa matriz.

El docente trabaja con todas estas respuestas. La condición que se necesita para triangular la matriz ampliada asociada al sistema o encontrar la inversa de la matriz de coeficientes es que $ad - bc \neq 0$.

Luego, se les puede proponer a los estudiantes que den ejemplos de matrices A que hagan que el sistema tenga solución única y de matrices A que hagan que el sistema no tenga solución única.

Después de todo lo trabajado, el docente escribe en el pizarrón la siguiente afirmación:

Proposición 4.1.1. *Sea* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. *Un sistema de ecuaciones lineales*

$$A \cdot X = B$$

tiene solución única si y solo si A *es inversible, si y solo si* $ad - bc \neq 0$.

A partir de esta propiedad, se da un nombre al número $ad - bc$, es decir, se da la definición de determinante de una matriz.

Definición 4.1.2. *Sea* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *se define el determinante de* A *como*

$$\det(A) = ad - bc.$$

A partir de esta definición, se les propone que resuelvan el punto 2 del problema modelo. Si el determinante de una matriz cuadrada da distinto de cero, ¿qué información dice algo sobre la existencia de la inversa de dicha matriz?

Luego de este trabajo, surge la pregunta acerca de cómo calcular el determinante de una matriz de mayor tamaño. Explicar, mediante ejemplos, cómo se calcula, a partir del desarrollo por cofactores, el determinante de una matriz cuadrada de cualquier tamaño.

Después de esta breve explicación, se les puede pedir que calculen el determinante de la matriz del punto 3, desarrollándola por la primera fila y por la tercera columna. A partir de estos cálculos, preguntar cuánto dio el determinante hallado. Deben concluir que el valor del determinante mediante el desarrollo por cofactores es el mismo, no importa la elección de la fila o la columna.

Por último, proponer a los estudiantes que trabajen con el punto 4. Para el cálculo del determinante van a usar el desarrollo por filas o columnas mediante el método de Laplace o desarrollo por cofactores. Una opción es pedirles que elijan varias filas o columnas y preguntar qué fila o columna conviene para hacer la menor de las cuentas posibles. Otra variante de trabajo es proponerles que busquen en algún libro otra técnica para calcular el determinante y que, luego, respondan si cambia el valor del determinante de la matriz si se cambia de técnica de cálculo.

Mediante este trabajo se podrá concluir que el método de Laplace es recursivo, es decir, para calcular el determinante de una matriz de tamaño 4×4 se necesita calcular determinantes de matrices de tamaño más pequeño. Otra observación que surge de este trabajo es que, para hacer menos cuentas, se puede elegir una fila o una columna con muchos ceros. Por ejemplo, en este punto, la fila 4 o la columna 1, permite el cálculo del valor del determinante con pocas cuentas.

A partir de todo este trabajo, se llega a concluir la siguiente propiedad:

Teorema 4.1.3. *Sea A una matriz cuadrada triangular, es decir*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \dots & \dots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Entonces $det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{nn}$.

4.2. Propiedades del determinante

Este problema modelo tiene como objetivo usar algunas propiedades conocidas a partir de la definición de la función determinante que se verá en la materia.

Problema modelo

1. Sabiendo que $\det(A) = 7$, donde $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, indicar cuánto vale el determinante de cada una de las siguientes matrices:

   a) $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

   b) $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix}$.

c) $\det\begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ d+g & e+h & f+i \end{pmatrix}$. d) $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

2. Sean A, B matrices de 4×4 tal que $\det(A) = -1$ y $\det(B) = 2$. Calcular cada uno de los siguientes determinantes:

   a) $\det(AB)$.
   b) $\det(A^T A)$.
   c) $\det(B^5)$.
   d) $\det(B^{-1}AB)$.
   e) $\det(2A)$.

3. a) Encontrar dos matrices distintas que tengan determinante 2.
   b) Encontrar dos matrices A, B tales que $\det(A) \cdot \det(B) = 1$.

Para el trabajo con los ejercicios de este problema modelo, se usan las siguientes propiedades, que se deducen de la definición de la función determinante:

Proposición 4.2.1. *Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Si B se obtiene de A multiplicando una fila por un número k distinto de cero, entonces* $\det(B) = k\det(A)$.

Proposición 4.2.2. *Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Si B se obtiene intercambiando dos filas, entonces* $\det(B) = -\det(A)$.

Proposición 4.2.3. *Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Si B se forma reemplazando cualquier fila de A por la suma de esa fila y k veces otra fila, entonces* $\det(B) = \det(A)$.

La propuesta de trabajo es motivar estas propiedades por medio de ejemplos en los que los estudiantes puedan encontrar ciertas regularidades a partir de las propiedades elementales por filas. Por ejemplo, proponer una matriz de tamaño 2×2 particular, como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

y hacer las siguientes preguntas:

- ¿Cuánto vale el determinante de A?
- Si se multiplica la fila 1 de A por un número cualquiera distinto de cero y se calcula el determinante de la nueva matriz A_1, ¿qué relación hay entre $\det(A)$ y el determinante de A_1?
- Si se intercambian las dos filas de A y se calcula el determinante de la nueva matriz A_2, ¿qué relación hay entre el determinante de A y el de A_2?

- Si se reemplaza en la fila 1 de A, la suma de esa fila y 3 veces la fila 2, y se calcula el determinante de la nueva matriz A_3, ¿qué relación hay entre el determinante de A y el de A_3?

Luego, se puede preguntar ¿es posible obtener una propiedad a partir de lo trabajado, pero cuando A es una matriz general de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$?¿Existen operaciones elementales entre las filas de A que hacen que el determinante no cambie su valor?

A continuación, proponer a los estudiantes que resuelvan en grupos los ítems a), b) y c) del punto 1.

Para resolver el ítem d) se necesita una propiedad que caracteriza al determinante. Con el fin de motivar su aparición, se puede proponer el mismo trabajo que antes: mediante ejemplos y preguntas orientadoras.

Proposición 4.2.4. *El determinante es una función lineal en cada fila, alternada y el determinante de la identidad es 1. Más precisamente,*

a)

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}+\alpha b_{11} & a_{12}+\alpha b_{12} & a_{13}+\alpha b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$+\alpha \det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

b) Si A tiene dos filas adyacentes iguales, su determinante es cero.

c) El determinante de la matriz identidad es 1.

Seguidamente se les propone que resuelvan el ítem d) del punto 1.

Después de todo este trabajo, resuelven el ítem 2. Para ello, una posible propuesta es que propongan ejemplos de matrices A y B tales que $\det(A) = -1$ y $\det(B) = 2$, y a partir de ahí, calculen todos los ítems. Después se les pide que den otros dos ejemplos de matrices A y B que cumplan con los determinantes respectivos y que vuelvan a contestar, para esos ejemplos, todos los ítems del punto 2. Por último, se puede preguntar qué regularidades encontraron.

El docente, entonces, escribe en el pizarrón la siguiente propiedad:

Teorema 4.2.5. *Sean A y B dos matrices cuadradas de tamaño $n \times n$.*

a) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

b) $\det(A) = \det(A^T)$.

c) *Si A es inversible entonces* $\det(A) \neq 0$ *y* $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

A continuación se pide que resuelvan el punto 3. Una pregunta pertinente es si posible dar un ejemplo de una matriz con determinante distinto de cero y que esa matriz sea no inversible.

Por último, se les puede proponer a los estudiantes que, usando la vista Cas de Geogebra, den ejemplos que satisfagan las condiciones propuestas en el punto 3. Indicar que el comando que calcula determinantes en Geogebra es Determinante(A).

4.3. Aplicaciones del determinante

Este problema modelo tiene como objetivo relacionar el determinante con la existencia de solución única o no de sistemas de ecuaciones donde la cantidad de incógnitas coincide con la de ecuaciones.

Problema modelo

1. Averiguar en internet cómo se calcula la solución de un sistema de ecuaciones lineales en el que la cantidad de ecuaciones coincide con la cantidad de incógnitas, usando el cálculo del determinante de la matriz de coeficientes.
2. ¿Cómo se llama el método para calcular soluciones de sistemas con el dato del determinante de la matriz de coeficientes? ¿Por qué se pide que el determinante de dicha matriz de coeficientes sea no nulo?
3. Encontrar la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales usando la Regla de Cramer:
$$\begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ 2y + 3z = 0 \\ 5x + 5y + z = 0 \end{cases}$$
4. Sea A una matriz de 4×4 tal que $\det(A) = 2$.

   a) Describir el conjunto solución de $AX = 0$.

b) Proporcionar una expresión para la solución $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

c) ¿El sistema $AX = B$ puede tener más de una solución? ¿Por qué?

d) Si C es otra matriz tal que $\det(AC) = 2$, ¿entonces la solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo $CAX = 0$ es $X = 0$?

5. Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$S := \begin{cases} x & + & ay & - & z = & a \\ ax & + & y & + & z = & 0 \\ x & + & y & + & az = & a^2 \end{cases}$$

a) A partir del concepto de determinante y usando herramientas de Geogebra, discutir el tipo de solución del sistema de ecuaciones lineales S de acuerdo con los distintos valores del parámetro a.

b) Resolver el sistema de ecuaciones lineales para el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resolver el sistema de ecuaciones lineales S para $a = 3$.

Se propone a los estudiantes que investiguen en internet sobre el método de Cramer para encontrar soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con la misma cantidad de incógnitas que ecuaciones. Luego, escribir el teorema en el pizarrón.

Teorema 4.3.1. *Dado el sistema de ecuaciones lineales*

$$AX = B,$$

donde A es una matriz de tamaño $n \times n$ y B una matriz de tamaño $n \times 1$. Si $det(A) \neq 0$, entonces el sistema tiene solución única que es $X = (x_1 \dots , x_n)$, donde

$$x_i = \frac{\det(A_i(B))}{\det(A)},$$

donde $A_i(B)$ es la matriz que se forma de A reemplazando la columna i de A por B.

A partir de este enunciado, preguntar:

- ¿Por qué se pide que $\det(A)$ sea no nulo?
- ¿Cómo calcular la solución del sistema de ecuaciones lineales usando la inversa de A?

Los estudiantes deben relacionar la inversa de A con la noción de que el determinante de A es distinto de cero y de que el sistema de ecuaciones $AX = B$ tiene solución única. A continuación, se les pide que encuentren la solución de un sistema sencillo con este método y que también lo calculen por el método de la inversa de la matriz de coeficientes o de eliminación gaussiana. Es interesante trabajar un poco con los distintos métodos, observando las ventajas de uno o de otro a la hora de encontrar la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Un ejemplo es el siguiente:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x + 5y = 3 \end{cases}$$

Otra pregunta disparadora que se puede hacer es si es posible calcular las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Cramer:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2x - 2y - 2z = -2 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

Luego de este trabajo, se invita a los estudiantes a que intenten encontrar la solución del sistema de ecuaciones lineales del punto 3. También se puede pedir que lo resuelvan por otro método y que comparen estrategias. Luego, se puede preguntar:

- ¿Cuánto vale el determinante de la matriz de coeficientes?
- Según este cálculo, ¿el sistema tiene solución única o no?
- Si el sistema tiene solución única, ¿es necesario calcular la solución del sistema? ¿Por qué?

Seguidamente, se pide que en grupos resuelvan el punto 4, con el objetivo de que afiancen lo aprendido. Más precisamente, que trabajen con la idea de que si se tiene un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ con la misma cantidad de ecuaciones que incógnitas, y el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, entonces la solución de ese sistema es única. A partir de esta información se sabe, además, que la matriz de coeficientes del sistema es inversible, y por lo tanto la solución es $X = A^{-1}B$. Este punto se puede dejar de tarea, y luego invitar a que pasen al pizarrón para trabajar los modos de escribir de manera clara y correcta la respuesta a un problema.

Para finalizar, se les puede proponer que trabajen con Geogebra para resolver el punto 5 del problema modelo y discutir en una puesta en común las distintas respuestas.

CAPÍTULO

5

Introducción a los espacios vectoriales

Los problemas modelo para trabajar los temas de *introducción a los espacios vectoriales* introducen los conceptos y explicaciones de cómo trabajarlo en clase. El capítulo correspondiente del *Libro para el estudiante* ofrece más actividades en las secciones Guías de problemas y Ejercicios varios.

Los temas de esta unidad son:

1. Concepto de espacio vectorial y subespacio.
2. Combinación lineal y sistemas de generadores.
3. Dependencia o independencia lineal y bases de un espacio vectorial.

Sus objetivos son:

- Interpretar las matrices con las operaciones suma y producto escalar como ejemplos de una estructura más general: la de espacio vectorial.
- Interpretar el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo como un subespacio, es decir, como un conjunto de vectores que es cerrado para la suma y el producto escalar.
- Estudiar las nociones de combinación lineal, sistemas de generadores e independencia lineal de un conjunto finito de vectores, a través de ejemplos.

La noción de espacios vectoriales y subespacios se retomará más adelante, cuando se exponga el tema vectores en el plano y en el espacio.

5.1. Concepto de espacio vectorial y subespacio

Este problema modelo tiene como objetivo introducir una estructura que no es nueva, la de espacio vectorial y subespacio. Si bien se vieron ejemplos de esta estructura antes, en esta unidad se les pone nombre. Este es uno de los conceptos más importantes de Álgebra Lineal.

Problema modelo

1. Investigar acerca de la definición de espacio vectorial.
2. Considerar el conjunto de los números complejos

$$\mathbb{C} = \{a + bi \,:\, a, b \in \mathbb{R}\},$$

con la suma de complejos

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

y la multiplicación por escalar

$$k \cdot (a + bi) = (k \cdot a) + (k \cdot b)i,$$

con $k \in \mathbb{R}$. A partir de lo investigado, ¿se puede decir que $\mathbb{C}$ con la suma y la multiplicación por escalar forma un espacio vectorial?
3. ¿Es posible que el conjunto de todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con la suma de matrices y la multiplicación por escalar forme un espacio vectorial?
4. Dar un ejemplo de espacio vectorial.
5. Investigar acerca de la definición de subespacios. Proponer un ejemplo.
6. Sea el conjunto de todas las soluciones del sistema

$$AX = 0,$$

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes del sistema, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la matriz de incógnitas y $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
¿Es $(0, 0)$ solución del sistema? ¿Tiene otras soluciones? ¿Qué describe gráficamente el conjunto de soluciones del sistema? ¿Se puede decir que el conjunto de soluciones forma un subespacio?
7. Considerar el sistema

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \\ -3x + 3y + 6z = 0 \end{cases}$$

¿El vector $(0, 0, 0)$ es solución? ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?¿Se puede decir que el conjunto de soluciones forma un subespacio?

8. Decidir si los siguientes conjuntos forman un subespacio:
   a) S_1 el conjunto formado por (x, y) tales que $x \geq 0$.
   b) S_2 el conjunto formado por (x, y) tales que $x \geq 0$ e $y \geq 0$.
   c) S_3 el conjunto formado por todos los $(0, y)$ tales que $y \in \mathbb{R}$.
   d) S_4 el conjuunto formado por todos los (x, y) tales que $x + y = 0$.

Con este problema modelo se introduce el concepto de espacios vectoriales y subespacios. Este concepto central del Álgebra Lineal suele resultar abstracto si se comienza, como en la mayoría de los libros o clases de Álgebra, por la definición en el pizarrón y luego se dan ejemplos. Por eso, se invita a los estudiantes a que investiguen en grupos sobre este concepto y lo relacionen con lo visto en las clases anteriores.

Se da un tiempo para la búsqueda de esta información o se pide que reúnan información que se organizará en la clase. Para finalizar, se escribe un resumen en el pizarrón.

La propuesta de trabajo es reflexionar sobre la lectura del material, dando ejemplos de espacios vectoriales.

La definición que debería encontrarse en este trabajo es la siguiente:

Definición 5.1.1. *Un espacio vectorial real es un conjunto no vacío V de objetos, llamados vectores, en el que están definidas dos operaciones, la suma, es decir una operación que a cada par $v, w \in V$ se le asigna $v + w \in V$ y una multiplicación por escalar, es decir que a cada $k \in \mathbb{R}$ y $v \in V$ se le asigna $k \cdot v \in V$, y tal que se verifica los siguientes axiomas:*

a) $v + w = w + v$, *para cada* $v, w \in V$.
b) $v + (w + u) = (v + w) + u$, *para cada* $v, w, u \in V$.
c) Existe $0 \in V$ *tal que* $v + 0 = v$, *para cada* $v \in V$.
d) Para cada $v \in V$ *existe* $(-v) \in V$ *tal que* $v + (-v) = 0$.
e) $k \cdot (v + w) = k \cdot v + k \cdot w$, *para cada* $k \in \mathbb{R}$ *y cada* $v, w \in V$.
f) $(k_1 + k_2) \cdot v = k_1 \cdot v + k_2 \cdot v$, *para cada* $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ *y cada* $v \in V$.
g) $(k_1 \cdot k_2) \cdot v = k_1 \cdot (k_2 \cdot v)$, *para cada* $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ *y cada* $v \in V$.
h) $1 \cdot v = v$ *para cada* $v \in V$.

En todo el capítulo llamamos al espacio vectorial real V simplemente espacio vectorial.

Los puntos 2 y 3 del problema modelo son ejemplos de espacios vectoriales, uno referido al conjunto de los números complejos y otro, al conjunto de las matrices de tamaño 2×2. Estos ejemplos fueron tratados anteriormente, pero en este problema se les da una nueva estructura. Una posible propuesta de trabajo es hacer preguntas que inviten a reflexionar sobre cada uno de los ítems de la definición de espacio vectorial, por ejemplo:

- En estos ejemplos, ¿cuáles son los vectores a que hace referencia la definición de espacio vectorial?
- ¿La propiedad conmutativa de la suma vale en estos dos ejemplos?
- ¿Cuál es el elemento neutro para la suma?
- ¿ Y el opuesto aditivo?
- ¿Cuál es el 1 en estos ejemplos?
- ¿Se verifica el punto h) de la definición de espacios vectoriales?

Otra propuesta de trabajo es que den nuevos ejemplos de espacios vectoriales, en especial, alguno relacionado con Introducción al Análisis Matemático.

Se les puede proponer también el siguiente ejercicio:

Ejercicio 5.1.2. 1. *Considerar el conjunto de todos los vectores* $v = (x, y)$*, donde* x, y *son números reales. A este conjunto se lo denota con* $\mathbb{R}^2$*. Más adelante se dará una representación geométrica. También se pueden ver estos vectores como un ejemplo de matrices de tamaño* 2×1 *o de tamaño* 1×2 *al escribirlo de la forma* $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

En este conjunto se pueden definir las siguientes operaciones:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$k \cdot (x, y) = (kx, ky).$$

Mostrar que el conjunto de todos los vectores con la suma y la multiplicación por escalar forma un espacio vectorial real.

2. *¿El conjunto de todos los vectores* $v = (x, y, z)$*, donde* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *con la suma y multiplicación por escalar definida en el ítem anterior, forma un espacio vectorial? Este conjunto se lo nota con* $\mathbb{R}^3$ *y representa todo el espacio. Trabajar con este conjunto en la unidad de vectores en el plano y espacio.*

Después se pide a los estudiantes que investiguen sobre la definición de subespacio. Una posible variante de trabajo en clase es que den ejemplos de subespacio y que intenten argumentar por qué se verifica cada una de las condiciones de la definición. Se les puede preguntar qué diferencia hay entre espacio vectorial y subespacio.

A partir de esta reflexión, se les propone que, en grupos, trabajen con los puntos 6 y 7, en los que hay ejemplos concretos de subespacios.

Sea V un espacio vectorial, donde se tiene definida la suma

$$v, w \in V \Rightarrow v + w \in V, \tag{5.1}$$

y la multiplicación por escalar

$$k \in \mathbb{R}, \quad v \in V \Rightarrow k \cdot v \in V. \tag{5.2}$$

Sea S un subconjunto de V tal que con la suma (5.1) y la multiplicación por escalar (5.2) forma un espacio vectorial. Entonces se dice que S es un subespacio de V. Se puede ver que para que S sea un subespacio de V es suficiente probar las siguientes tres condiciones:

Proposición 5.1.3. *Un subconjunto S de un espacio vectorial es un subespacio si se verifican las siguientes condiciones:*

a) $0 \in S$.

b) Si $v, w \in S$ entonces $v + w \in S$.

c) Si $v \in S$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces $k \cdot v \in S$.

Retomando el trabajo hecho con los sistemas de ecuaciones lineales y matrices, los estudiantes pueden encontrar fácilmente la o las soluciones de los sistemas homogéneos planteados en los puntos 6 y 7. Estos ejercicios aportan una nueva mirada al concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Una vez calculadas dichas soluciones, se les pide que decidan si corresponden o no a subespacios.

La primera dificultad que puede surgir es que los estudiantes no sepan interpretar cuáles son los vectores de estos ejemplos. En este caso, una posible intervención del docente sería comentar que en la propiedad 5.1.3 de subespacio hace referencia a vectores que cumplen tres condiciones y, a continuación preguntar cuáles son los vectores en este contexto. En este punto, los estudiantes deberían poder explicar que los vectores son las soluciones del sistema homogéneo propuesto. Por ejemplo, en el punto 6, los vectores son todos los puntos de la forma (x, y) tales que $y = \frac{-x}{2}$, con $x \in \mathbb{R}$.

Una vez que los estudiantes debatieron en sus grupos, se hace la puesta en común de todas las respuestas. Si algún grupo no puede realizar el trabajo, una estrategia de enseñanza es hacerles las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las soluciones del sistema?
- ¿Puede ser $(0, 0)$ solución del sistema?
- ¿Se puede afirmar que el sistema tiene infinitas soluciones? ¿Por qué?

A continuación, se les puede proponer el siguiente ejercicio:

Ejercicio 5.1.4. *A partir de las soluciones del punto 6, resolver las siguientes consignas.*

- *Dar dos ejemplos v y w de soluciones del sistema de ecuaciones lineales.*
- *Verificar que v y w son soluciones del sistema $AX = 0$.*
- *¿Es posible que $v + w$ sea solución del sistema?*
- *¿Es posible que $k \cdot v$ sea solución del sistema para cualquier valor de k?*

Otra propuesta es que los estudiantes grafiquen en Geogebra el conjunto solución del sistema homogéneo. A partir de estos dibujos, se pueden realizar las siguientes preguntas:

- ¿Qué representa la gráfica?
- ¿Cómo se puede explicar que si hay dos puntos de la gráfica, entonces la suma de esos puntos también está en la gráfica?
- ¿Por qué un múltiplo de un punto de la gráfica también pertenece al gráfico?

Si alguno de los grupos no puede responder, proponerle que mire el ejercicio 6, en el que se afirma que los vectores (x, y) de $\mathbb{R}^2$ forman un espacio vectorial. Luego, que el grupo intente demostrar, a partir de la suma y multiplicación escalar allí definida, que el conjunto de soluciones del sistema del punto 6 cumple las tres condiciones de subespacio de la Proposición 5.1.3.

Otra alternativa es recordarles que las soluciones de $AX = 0$ corresponden a matrices X de tamaño 2×1. A partir de ahí, se les puede pedir que expliquen cómo se suman matrices y cómo se multiplica una matriz por un número real.

Finalmente, se trabajan todas las respuestas que aparecieron para demostrar que las soluciones del sistema homogéneo del punto 6 forman un subespacio.

Para resolver el punto 7, los estudiantes pueden realizar un trabajo similar al que hicieron en el punto 6.

A continuación, proponer a los estudiantes que grafiquen los conjuntos del punto 8 y que decidan si son subespacios a partir de las tres condiciones de la Proposición 5.1.3. Se pide también que justifiquen mediante argumentos sus decisiones. En la puesta en común se puede trabajar con todas las argumentaciones de los estudiantes, mediante preguntas. Por ejemplo, se puede preguntar por qué el conjunto S_1 no forma un subespacio. Se puede graficar S_1 en el plano.

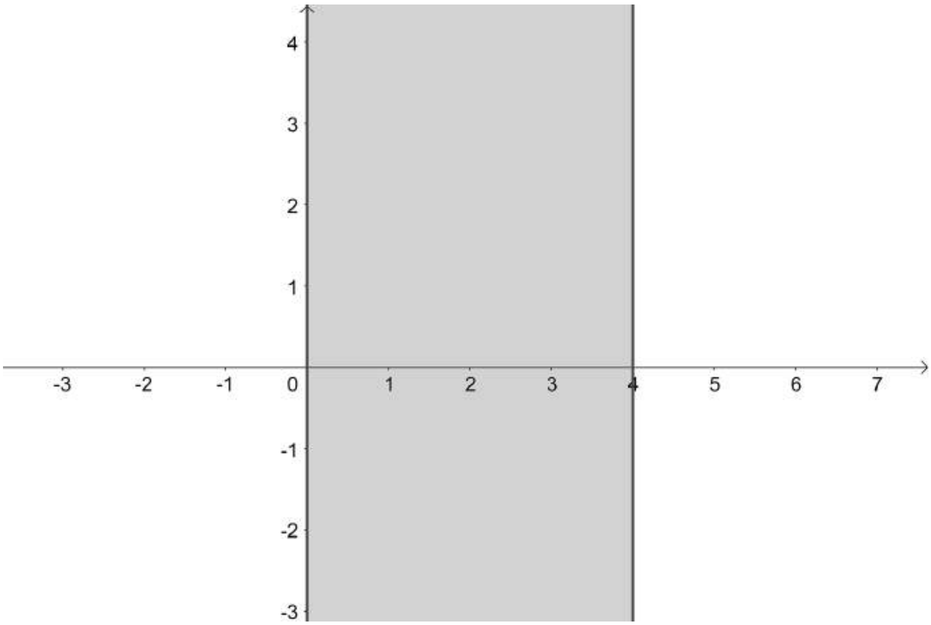


Figura 5.1

Luego, se puede proponer a los estudiantes que tomen un punto de S_1, por ejemplo $(1,2)$, y un valor negativo k, por ejemplo -2, y preguntarles si $(-2)\cdot(1,2)$ pertenece al conjunto S_1. Si no pertenece, pedir que expliquen qué quiere decir esta información en relación a si S_1 es un subespacio.

Nota: El ejercicio 5.1.4 del Libro para el estudiante permite realizar un trabajo similar relacionado con el concepto de subespacio.

5.2. Combinación lineal y sistemas de generadores

Este problema modelo permite introducir la noción de combinación lineal y sistemas de generadores asociados a un espacio vectorial.

Problema modelo

1. Una compañía fabrica dos productos. Por cada dólar obtenido del producto B, la compañía gasta $0,45$ dólares en materiales, $0,25$ dólares en mano de obra y $0,15$ dólares en gastos generales. Por cada dólar obtenido del producto C, la compañía gasta $0,40$ dólares en materiales, $0,30$ dólares en mano de obra y $0,15$ dólares en gastos generales.

$$B := \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,25 \\ 0,15 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 0,40 \\ 0,30 \\ 0,15 \end{pmatrix}$$

B, C representan los costos por dólar de ingreso de los dos productos.

a) ¿Qué interpretación económica puede darse al vector $100B$?

b) La compañía desea fabricar x_1 dólares del producto B y x_2 dólares del producto C. Proporcionar un vector que describa los diversos costos que tendrá por materiales, mano de obra y gastos generales.

2. Una compañía minera tiene dos minas. Las operaciones de un día en la mina 1 producen mineral que contiene 20 toneladas métricas de cobre y 550 kilogramos de plata, mientras que las operaciones de un día en la mina 2 producen minerales que contiene 30 toneladas métricas de cobre y 500 kilogramos de plata. Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 550 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 30 \\ 500 \end{pmatrix}$. Entonces v_1 y v_2 representan el rendimiento diario de las minas 1 y 2, respectivamente.

   a) ¿Qué interpretación física se puede dar al vector $5v_1$?

   b) La compañía trabaja la mina 1 x_1 días y la mina 2 x_2 días. Escribir una ecuación cuya solución dé el número de días que deba trabajarse cada mina para producir 150 toneladas de cobre y 2825 kilogramos de plata.

   c) Resolver la ecuación del ítem b.

3. ¿Es posible que el vector $(7, 4, -3) \in \mathbb{R}^3$ sea una combinación lineal de los vectores $(1, -2, -5)$ y $(2, 5, 6)$?

4. Considerar un conjunto H formado por todas las combinaciones lineales de $(1, 4, 7)$ y $(1, 3, 2)$, es decir, el conjunto está formado por todos los vectores de la forma

$$\alpha(1, 4, 7) + \beta(1, 3, 2) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

   ¿El vector $(1, 5, -3) \in H$? ¿Y el vector $(1, 0, -13)$?

   Este conjunto H se llama el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, 4, 7)$ y $(1, 3, 2)$.

5. ¿Es posible que cualquier elemento de $\mathbb{R}^3$ se escriba como combinación lineal de los vectores $v_1 := (1, 2, 1)$, $v_2 := (1, 0, 2)$ y $v_3 := (1, 1, 0)$?

6. ¿Es posible que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ generen el conjunto de todas las matrices simétricas de tamaño 2×2?

Recordar que una matriz cuadrada A se dice simétrica si y solo si $A = A^T$.

Este problema modelo motiva el trabajo con dos conceptos relacionados con la noción de espacio vectorial: uno de ellos es la noción de combinación lineal y el otro, el de sistema de generadores o subespacio generado.

Se puede proponer a los estudiantes que resuelvan los puntos 1 y 2 del problema modelo. Estos no deberían generar, en principio, ninguna dificultad, ya que son parecidos a los trabajados en sistemas de ecuaciones lineales. Si algún grupo tiene alguna dificultad en relación con el concepto de costo, se puede aclarar que el costo total se calcula mediante la suma de la cantidad de unidades de un producto por lo que sale cada unidad. Ambos puntos tienen que ver con modelización de ecuaciones lineales, que ya fue trabajada en la unidad de sistemas de ecuaciones lineales.

Las siguientes preguntas sirven para ordenar la puesta en común:

- ¿Cómo se puede representar el costo total de la empresa si quiere fabricar 1000 dólares del producto B y 2000 dólares del producto C? ¿Cuál es ese costo?
- ¿Y si se quiere representar el costo total de la empresa si quiere fabricar x_1 dólares del producto B y x_2 dólares del producto C?

En este punto hay que dejar escrito que el costo total de la empresa queda determinado por el vector

$$x_1B + x_2C, \quad B := \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,25 \\ 0,15 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 0,40 \\ 0,30 \\ 0,15 \end{pmatrix}.$$

A partir de este trabajo se puede definir el concepto de combinación lineal.

Definición 5.2.1. *Un vector v es combinación lineal de los vectores $v_1, \dots, v_n$ si y solo si existen $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ tales que*

$$v = k_1v_1 + \dots k_nv_n.$$

A continuación, se puede preguntar si el vector $\begin{pmatrix} 150 \\ 2825 \end{pmatrix}$ es una combinación lineal de los vectores v_1 y v_2 que se encuentran en el punto 2 del problema modelo. Si responden afirmativamente, se les pide que argumenten esa afirmación. También se les puede preguntar qué representa la combinación lineal

$$\begin{pmatrix} 150 \\ 2825 \end{pmatrix} = x_1v_1 + x_2v_2$$

del ítem b) del punto 2 del problema modelo. Este ejercicio permite darle un contexto a la definición de combinación lineal.

Luego de este trabajo, se puede pedir a los estudiantes que resuelvan el punto 3, problema que permite repasar el concepto visto. Si algún grupo no logra resolverlo, orientarlos preguntando qué quiere decir que $(7, 4, -3)$ sea combinación lineal de los vectores $(1, -2, -5)$ y $(2, 5, 6)$. Si algún grupo, teniendo la expresión

$$k_1(1, -2, -5) + k_2(2, 5, 6) = (7, 4, -3),$$

no sabe cómo encontrar los valores de k_1, k_2, se puede pedir que escriban esa igualdad como un sistema de ecuaciones lineales. En este caso aparece una cuestión que se trabajará más adelante, la igualdad de vectores. Se pueden relacionar los vectores con matrices y preguntarles cuándo dos matrices son iguales. Una respuesta es resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 = 7 \\ -2k_1 + 5k_2 = 4 \\ -5k_1 + 6k_2 = 3 \end{cases}$$

Algunas preguntas para trabajar, una vez que encuentren este sistema, son:

- ¿Cuántas soluciones tiene este sistema?
- ¿Cómo se traducen las soluciones del sistema en el problema propuesto?
- Si, por el contrario, el sistema no tiene solución, ¿cómo se traduce esto en la respuesta a la pregunta del problema propuesto?
- ¿Cómo decidir si el punto $(7, 4, -3)$ es combinación lineal de $(1, -2, -5)$ y $(2, 5, 6)$ a la luz de las soluciones del sistema?

En el punto 4, donde se trabaja de manera similar a los puntos anteriores, hay que averiguar si $(1, 5, -3)$ es combinación lineal de $(1, 4, 7)$ y $(1, 3, 2)$. Se puede preguntar si $(1, 0, -13)$ es combinación lineal de $(1, 4, 7)$ y $(1, 3, 2)$. Se recomienda dejar este ejercicio como tarea y retomarlo la clase siguiente. Otra variante es que lo resuelva un alumno en el pizarrón y entre todos debatan si es correcta la resolución del ejercicio o la escritura de esa resolución.

Luego, se les puede pedir a los estudiantes que, en grupos, resuelvan el punto 5. Si algún grupo no puede hacerlo, invitarlo a que lea el punto 4 y que, a partir de ahí y del trabajo ya realizado, intente contestar la pregunta. Si continúa sin poder resolver el ejercicio, se le pide que responda las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se puede escribir cualquier elemento de $\mathbb{R}^3$?

- ¿Qué quiere decir que cualquier elemento de $\mathbb{R}^3$ es una combinación lineal de los vectores v_1, v_2 y v_3?

A partir de lo realizado, los estudiantes deberían llegar a que, para que cualquier elemento de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ sea combinación lineal de v_1, v_2 y v_3, hay que encontrar números reales α, β y γ tales que

$$(a, b, c) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3.$$

A partir de esta igualdad, proponer el siguiente ejercicio:

Ejercicio 5.2.2. *a) ¿Cómo se puede resolver este problema con sistemas de ecuaciones lineales?*

b) ¿Qué quiere decir la existencia de solución del sistema con la idea de que cualquier elemento de $\mathbb{R}^3$ sea combinación lineal de v_1, v_2 y v_3?

En este punto, para decidir si cualquier elemento $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ resulta una combinación lineal de v_1, v_2 y v_3, se necesita poder resolver el sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a \\ 2\alpha + \gamma = b \\ \alpha + 2\beta + \gamma = c \end{cases}$$

Algunas preguntas orientadoras pueden ser:

- ¿Es necesario resolver el sistema para decidir si cualquier elemento $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ resulta una combinación lineal de v_1, v_2 y v_3?
- ¿Qué información nos da la existencia o no de soluciones?

Con todo este trabajo debería quedar establecido que cualquier elemento $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores v_1, v_2 y v_3. Por lo tanto, se dice que estos vectores generan $\mathbb{R}^3$.

A partir de todo lo realizado, se puede escribir en el pizarrón la siguiente definición:

Definición 5.2.3. *Sean $v_1, \ldots v_n$ vectores de un espacio vectorial V. Si se puede escribir cualquier vector w de V como combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$, se dice que estos vectores generan V.*

Dejar como tarea la resolución del punto 6, como una manera de repasar sistemas de generadores de un espacio vectorial.

Nota: Los ejercicios 5.2.6 y 5.2.7 del Libro para el estudiante proponen un trabajo similar.

5.3. Dependencia o independencia lineal y bases de un espacio vectorial

Este problema modelo permite estudiar los conceptos de independencia lineal y bases de un espacio vectorial.

Problema modelo

1. Sean $v_1 := (1,2,3)$, $v_2 := (4,5,6)$, $v_3 := (2,1,0)$ y $0 = (0,0,0)$ cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$.
   a) ¿Es posible que la ecuación $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ se pueda escribir como un sistema de ecuaciones lineales homogéneo?
   b) ¿Cuántas soluciones (α, β, γ) tiene el sistema de ecuaciones lineales?
   c) ¿Es posible escribir a v_3 como una combinación lineal de v_1 y v_2?
2. Sean $v_1 = (3,0,0)$, $v_2 = (-3,2,3)$ y $v_3 = (6,4,0)$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$.
   a) ¿Es posible que la ecuación $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ se pueda escribir como un sistema de ecuaciones lineales homogéneo?
   b) ¿Cuántas soluciones (α, β, γ) tiene el sistema de ecuaciones lineales?
   c) ¿Existen α, β no nulos tales que v_3 se escribe como $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$?
3. Sean $v_1 := (1,2,3)$, $v_2 := (4,5,6)$, $v_3 := (2,1,0)$ y $v_4 = (0,0,2)$ cuatro vectores de $\mathbb{R}^3$.
   a) Determinar si $B_1 := \{v_1, v_2, v_3\}$ son linealmente independiente. Si no lo es, encontrar una relación de dependencia lineal entre v_1, v_2 y v_3. ¿B_1 es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$?
   b) Probar que $B_2 := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$ ¿Son linealmente independientes?
   c) ¿Se puede sacar un vector de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ para que ese conjunto de tres vectores sea linealmente independiente y que genere todo $\mathbb{R}^3$? Si es así, probar que cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede escribir de manera única como combinación lineal de esos tres vectores elegidos.
4. Determinar si los vectores $v_1 := (1,0,1,0)$, $v_2 := (0,1,-1,2)$, $v_3 := (0,2,2,1)$ y $v_4 := (1,0,0,1)$ forman una base de $\mathbb{R}^4$. En caso de ser posible, hallar la dimensión del espacio vectorial.

5. Encontrar una base de $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 : A\boldsymbol{x} = 0\}$ donde $A := \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ y calcular la dimensión.
6. Encontrar una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga los vectores $(1, 0, 1, 0)$ y $(-1, 1, -1, 0)$.

Los dos primeros puntos motivan a adquirir el concepto de independencia lineal. Este concepto se puede relacionar con la existencia de solución única del sistema homogéneo $AX = 0$.

Se les puede proponer a los estudiantes que resuelvan esos dos primeros puntos reescribiendo las ecuaciones vectoriales planteadas como sistemas de ecuaciones lineales homogéneos.

Luego, se les pregunta:

- ¿Estos sistemas de ecuaciones lineales pueden no tener solución?
- Si algunos de los dos sistemas de ecuaciones lineales tiene solución, ¿esta solución del sistema es solución también de la ecuación vectorial?
- Si alguno de los dos sistemas de ecuaciones lineales tiene solución única, ¿es posible escribir un vector como una combinación lineal no nula de los otros? ¿Por qué?

Por medio de este trabajo se puede definir el concepto de independencia y dependencia lineal.

Definición 5.3.1. *Se dice que los vectores $v_1, \ldots, v_n \in V$ son linealmente independientes si la ecuación vectorial*

$$x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n = 0,$$

tiene únicamente la solución trivial $(0, \ldots, 0)$.

En cambio, se dice que $v_1, \ldots, v_n \in V$ son linealmente dependientes si existen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ no todos ceros tales que

$$x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n = 0.$$

El punto 3 permite, ya con los conceptos de independencia lineal y de sistema de generadores, definir la noción de base de un espacio vectorial. Además, ayuda a entender qué significa tener una base, en el sentido de que cualquier elemento del espacio vectorial se puede escribir de manera única como combinación lineal de la base.

Se les pide a los estudiantes que resuelvan el ítem a) del punto 3, en el que deben decidir si los elementos de B_1 son linealmente independientes y generan todo $\mathbb{R}^3$. Si algún grupo tiene problemas para decidirlo, se lo invita a que revise lo trabajado anteriormente. También, estas preguntas orientadoras pueden facilitar el razonamiento:

- ¿Cómo se puede decidir si los elementos de B_1 son linealmente independientes?
- ¿Cómo se puede reescribir la ecuación vectorial $\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3 = 0$ en términos de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo?
- A partir de las soluciones del sistema, ¿cómo se puede argumentar que los elementos de B_1 son linealmente independientes o no?
- ¿Cómo se puede decidir si los elementos de B_1 generan cualquier elemento de $\mathbb{R}^3$?
- ¿Es posible contestar la pregunta del ítem anterior usando las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales?

Los estudiantes deberían concluir que los vectores de B_1 no son linealmente independientes ni generan a todo elemento de $\mathbb{R}^3$.

Proponer que trabajen con el punto 3 b). Se puede hacer un trabajo similar, realizando las mismas preguntas. En este punto, los elementos de B_2 no son linealmente independientes, pero generan $\mathbb{R}^3$.

Una de las dificultades frecuentes aparece al querer demostrar que cualquier elemento de $\mathbb{R}^3$ no se genera a partir de v_1, v_2 y v_3. En efecto, no deberían poder encontrar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x, y, z) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3,$$

para cualquier elemento $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. De esta manera, al querer encontrar la solución al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + 2\gamma = x \\ 2\alpha + 5\beta + \gamma = y \\ 3\alpha + 6\beta = z \end{cases}$$

se puede observar que la matriz ampliada equivalente asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & |x \\ 0 & 3 & 3 & |2x - y \\ 0 & 0 & 0 & |x - 2y + z \end{pmatrix}.$$

El docente, entonces, puede orientar con estas preguntas:

- ¿Este sistema siempre tiene solución?
- ¿Existe alguna condición para que el sistema tenga solución?
- ¿Cómo se traduce esa condición en la posibilidad de que cualquier elemento de $\mathbb{R}^3$ se escriba como combinación lineal de los elementos de B_1?

Además, para ver que cualquier elemento de $\mathbb{R}^3$ se escribe como combinación lineal de los elementos de B_2, los estudiantes tienen que decidir si el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene solución:

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + 2\gamma = x \\ 2\alpha + 5\beta + \gamma = y \\ 3\alpha + 6\beta + 2\epsilon = z \end{cases}$$

Las preguntas que se pueden hacer en este punto son:

- ¿Este sistema tiene solución?
- ¿Existe alguna condición para que el sistema tenga solución?
- Si la respuesta es negativa, ¿cómo se traduce en la decisión de que los elementos de B_2 generan todo $\mathbb{R}^3$?

Se puede también pedir que respondan las siguientes preguntas:

- ¿Todo elemento de B_1 está en B_2?
- ¿Se puede escribir cualquier elemento de B_2 como combinación lineal de los otros, por ejemplo, v_4 es combinación lineal de v_1, v_2 y v_3? ¿Por qué?
- ¿Sucede lo mismo con los elementos de B_1, es decir, v_3 se escribe como combinación lineal de v_1, v_2?¿Por qué?
- ¿Qué elemento de B_2 se puede sacar para que el nuevo conjunto sea linealmente independiente?
- ¿Ese nuevo conjunto genera todo elemento de $\mathbb{R}^3$?
- Proponer un subconjunto de B_2 que genere todo $\mathbb{R}^3$ y resulte linealmente independiente.

A continuación se define el concepto de base de un espacio vectorial. Los conjuntos de vectores que, además de generar un espacio vectorial, resultan ser linealmente independientes caracterizan a dicho espacio, en el sentido en que cada vector del espacio vectorial en cuestión se puede escribir de manera única como combinación lineal de los elementos de dicho conjunto.

Definición 5.3.2. *Sea V un espacio vectorial y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto de vectores de V. Se dice que B es una base de V si y solo si B genera a V y son linealmente independientes. A la cantidad de elementos de la base se le llama la dimensión de V.*

Con esta definición, se pide que resuelvan estas consignas:

- ¿El conjunto propuesto en el ítem 3 c) forma una base de $\mathbb{R}^3$?
- En caso afirmativo, demostrar que cualquier elemento de dicha base se escribe de manera única como una combinación lineal de los otros elementos de la base. Escribir la única combinación lineal del vector $(-1, 1, 2)$ a partir de la base elegida.
- ¿Cuál es la dimensión de $\mathbb{R}^3$ como espacio vectorial?

Finalmente, deberán resolver los puntos 4 y 5 del problema modelo, que permiten repasar los conceptos vistos de base y dimensión de un espacio vectorial. Estos puntos se pueden dar como tarea y luego trabajar en clase con las distintas resoluciones.

Por último resuelven el punto 6. Este problema permite extender una base de $\mathbb{R}^4$ a partir de ciertos vectores linealmente independientes. Algunas preguntas oara orientar a los estudiantes, si fuera necesario:

- A partir del punto anterior, ¿cuál es la dimensión de $\mathbb{R}^4$?
- ¿Cuántos elementos tiene que tener la base?
- ¿Cuántos elementos faltan para tener una base de $\mathbb{R}^4$?
- ¿Se puede tener una base de $\mathbb{R}^4$ con tres vectores linealmente independientes? ¿Y con 5 vectores que generan $\mathbb{R}^4$?

CAPÍTULO

6

Transformaciones lineales

La colección problemas modelo propuestos en este capítulo trabajan *Transformaciones lineales*, con el objetivo de ayudar a construir el concepto. Cada docente elegirá en qué momento trabajarlos, así como los incluidos en las Guías de problemas y Ejercicios varios del *Libro para el estudiante*..

Los temas de este caítulo son:

1. Introducción a las transformaciones lineales.
2. Núcleo e imagen, y la matriz de una transformación lineal.
3. Autovalores y autovectores.
4. Diagonalización.

Y sus objetivos:

- Introducir las transformaciones lineales mediante la idea de transformar un vector $x \in \mathbb{R}^n$ en otro vector $b \in \mathbb{R}^m$, mediante la acción de una matriz A de tamaño $m \times n$, asociada a la transformación lineal.
- Identificar la resolución de la ecuación $Ax = b$ con las nociones de dominio, imagen y núcleo de la transformación lineal $T(x) = Ax$.
- Interpretar movimientos en el plano como ejemplos de transformaciones lineales.
- Construir ejemplos en el plano que ayuden a comprender los conceptos de autovalores y autovectores.
- Comprender e interpretar los conceptos de autovector y autovalor.
- Construir modelos dinámicos para describir los autovalores y autovalores de una transformación lineal.

6.1. Introducción a las transformaciones lineales

El siguiente problema modelo tiene como objetivo introducir la noción de transformación lineal. Para ello se da un nuevo sentido a la resolución del sistema de ecuaciones lineales $A \cdot X = B$. Resolver dicho sistema es equivalente a encontrar todos los vectores X que se transformen en el vector B por la acción de multiplicar por A. Esto sucede cuando se piensa en la matriz A como un objeto que actúa sobre X multiplicándolo para producir un nuevo vector llamado $A \cdot X$.

Problema modelo

1. Si se multiplica una matriz A de tamaño 2×2 por un vector X de tamaño 2×1, se obtiene otro vector $B = A \cdot X$ de tamaño 2×1.
   Sean cada una de las matrices A,

   a) $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   b) $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

   c) $A := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   d) $A := \begin{pmatrix} cos(45^o) & -sen(45^o) \\ sen(45^o) & cos(45^o) \end{pmatrix}$

   - Dibujar en Geogebra el cuadrado C de vértices $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   - Realizar para cada X_i, la operación $A \cdot X_i$ con $i = 1, 2, 3, 4$.
   - ¿Qué ocurre con cualquier punto (x, y) del cuadrado C si se lo multiplica por A?
   - Dibujar el cuadrilátero $A(C)$ de vértices $A \cdot X_1$, $A \cdot X_2$, $A \cdot X_3$ y $A \cdot X_4$.
   - ¿En qué figura geométrica se transforma el cuadrado C al multiplicar cada uno de los puntos de sus segmentos y vértices por la matriz A?

2. La operación: cada vector X se transforma al multiplicar por A en el vector $A \cdot X$, puede pensarse como una función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(X) = A \cdot X.$$

   Elegir una de las matrices del ítem anterior y resolver las consignas.

- Probar que la función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x,y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  cumple:

  - $T(v+w) = T(v) + T(w)$ para cada $v, w \in \mathbb{R}^2$.
  - $T(kv) = kT(v)$ para cada $v \in \mathbb{R}^2$ y cada $k \in \mathbb{R}$.

  Las funciones T que verifican los dos ítems anteriores se llaman transformaciones lineales.

- Para la función del ítem anterior encontrar todos los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $T(x,y) = (0,0)$.
  El conjunto de todos los (x,y) tales que $T(x,y) = (0,0)$ se llama el núcleo de T.

Un posible trabajo con este problema modelo es que cada grupo de estudiantes se ocupe de una matriz distinta. Luego, dos integrantes de cada grupo contarán cuáles fueron las conclusiones observadas al realizar los gráficos.

Estas son algunas preguntas para orientar la puesta en común:

- ¿Cuáles son los valores de $A \cdot X_i$ para cada $i = 1,2,3,4$?
- ¿Cómo se transforma el cuadrado C de vértices X_1, X_2, X_3, X_4 al mutiplicarlo por la matriz A?
- ¿Cómo se puede escribir una fórmula general que permita describir la transformación que se produce al multiplicar por A cualquier punto (x,y) de C?

A continuación se pide a los estudiantes que tomen la matriz estudiada en cada grupo y definan la función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x,y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Seguidamente, resuelven el punto 2. Trabajar con todas las formas posibles de argumentar dicha afirmación. Si algún grupo no puede hacerlo, se le propone que resuelva el siguiente ejercicio.

Ejercicio 6.1.1. *Tomar los puntos X_1 y X_2 del punto 1 y demostrar que*

a) $T(X_1 + X_2) = T(X_1) + T(X_2)$.

b) $T(kX_2) = kT(X_2)$, *con* $k = 3$.

¿El ítem a) vale para cualesquiera dos puntos que son vértice de C? ¿Valen también para cualesquiera dos puntos de $\mathbb{R}^2$? ¿El ítem b) solo vale para $k = 3$?

Los estudiantes pueden demostrar este punto usando que $A\cdot(X_2+X_3) = A\cdot X_2+A\cdot X_3$, propiedad ya vista en clase, o usando las operaciones definidas en $\mathbb{R}^2$, operaciones que lo convierten en espacio vectorial. En la puesta en común se presentan todas las resoluciones posibles.

Una vez demostrado el punto 2, se define la noción de transformación lineal.

Definición 6.1.2. *Sean V, W dos espacios vectoriales y sea $T : V \to W$ una función entre esos espacios. Se dice que es una transformación lineal si se satisface*

a) $T(v + w) = T(v) + T(w)$ *para cualesquiera* $v, w \in V$.

b) $T(kv) = kT(v)$ *para cualesquiera* $k \in \mathbb{R}$ *y* $v \in V$.

Por último, se pide a los grupos que, a partir de la matriz A elegida, encuentren todos los $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $T(x, y) = (0, 0)$. A continuación se les pide que respondan cuál es la relación entre estos vectores y las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos.

Nota: Para un trabajo similar se pueden elegir los ejercicios 6.1.1, 6.1.2, 6.1.3, 6.1.4 o 6.1.5 del Libro para el estudiante.

6.2. Núcleo e imagen y la matriz de una transformación lineal

Con el siguiente problema modelo se estudian algunos conceptos asociados a una transformación lineal, como el núcleo, la imagen y la matriz de una transformación lineal.

Problema modelo

1. Sean $A := \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, $u := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ y $c := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   Sea la función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

   a) Mostrar que $T(u + v) = T(u) + T(v)$ y $T(3u) = 3T(u)$.

b) Encontrar $T(u)$, la imagen de u bajo la transformación T.

c) Encontrar una $x \in \mathbb{R}^2$ cuya imagen bajo T sea b.

d) ¿Hay más de una x cuya imagen bajo T sea b?

e) Determinar si c está en la imagen de la transformación T.

2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T(v) = (1, 2)$ y $T(w) = (1, 4)$. Calcular $T(v + w)$ y $T(3v - 2w)$.

3. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(1, 0) = (5, 3)$ y $T(0, 1) = (1, 4)$.

   a) Calcular $T(4, 5)$

   b) Calcular $T(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   c) Encontrar A tal que $T(x, y) = A(x, y)$.

   d) Encontrar todos los (x, y) tales que $T(x, y) = (0, 0)$

4. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por $T(1, 1) = (1, -2)$ y $T(-1, 1) = (2, 3)$.

   a) Calcular $T(-1, 5)$.

   b) Calcular $T(x, y)$.

   c) Encontrar una matriz A tal que $T(x, y) = A(x, y)$. Dicha matriz se llama la matriz canónica asociada a T.

5. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 + x_4)$.

   a) ¿$(1, -1, 0, 0) \in \mathrm{Nu}(T)$?

   b) Encontrar todos los vectores en $\mathbb{R}^4$ que están en $\mathrm{Nu}(T)$, el núcleo de T.

   c) Encontrar todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ que están en $\mathrm{Im}(T)$, la imagen de T.

Proponer a los estudiantes que, en grupos, resuelvan el punto 1 del problema modelo. Allí se describe una función que transforma vectores de $\mathbb{R}^2$ en vectores de $\mathbb{R}^3$. Si algún grupo no puede resolver los ítems c), d) y e), se le pide que resuelva las siguientes consignas.

- ¿Cómo se define la imagen de una función? Trabajar con este punto, relacionándolo con conocimientos previos .
- ¿Cómo se puede relacionar la pregunta de si existe un vector $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x) = b$ con la de un sistema de ecuaciones lineales?

En este punto, los estudiantes van a querer resolver los sistemas de ecuaciones lineales $A \cdot x = b$ y $A \cdot x = c$. Se les puede preguntar:

- ¿Cómo se puede contestar el ítem c) si el sistema $A \cdot x = b$ tiene solución? ¿Y si la solución es única, puede haber más de un $x \in \mathbb{R}^2$ cuya imagen bajo T sea b?

- ¿Cuántas soluciones tiene el sistema $A \cdot x = c$?

Luego de ese trabajo se define el conjunto imagen de una transformación lineal $T : V \to W$ como todos los $b \in W$ tales que existe $x \in V$ tal que $T(x) = b$.

Si la función T está definida como $T(x) = A \cdot x$, donde A es una matriz, entonces un elemento b está en la imagen de T si y solo si $A \cdot x = b$ tiene solución. Si dicha solución es única, entonces existe único x tal que $T(x) = b$. Y si el sistema no tiene solución, entonces b no está en la imagen de T.

En el punto 1 del problema se sabe que b está en la imagen de T mientras que c no lo está.

A continuación, los estudiantes resuelven el punto 2. Puede ocurrir que algunos no puedan hacerlo porque no está definida la transformación lineal T. Una estrategia es pedirles que respondan estas preguntas.

- Si se conoce el valor de $T(v)$ y T es una transformación lineal, ¿es posible saber el valor de $T(3v)$?
- ¿Cómo se puede relacionar el valor de $T(v + w)$ con los valores de $T(v)$ y $T(w)$?

Después se propone que resuelvan los puntos 3 y 4. Estos dos problemas tienen como objetivo encontrar una expresión de la transformación lineal a partir de algunos valores, usando, principalmente, el concepto de base de un espacio vectorial. Además, definen la matriz canónica asociada a una transformación lineal. Se explican algunos modos de trabajo para el punto 4 y se puede hacer un tratamiento similar con el punto 3.

Una de las primeras dificultades que puede surgir en el ítem a) es que los estudiantes no puedan encontrar la imagen de $(-1, 5)$ al aplicarle T. A continuación se presentan algunas preguntas para guiar el trabajo.

- ¿Qué datos conocen?
- ¿Se puede escribir a $(-1, 5)$ como una combinación lineal de $(1, 1)$ y $(-1, 1)$? ¿Por qué?
- Si la respuesta al ítem anterior es afirmativa, entonces $(-1, 5) = \alpha(1, 1) + \beta(-1, 1)$. A partir de esta igualdad, ¿cómo se puede encontrar el valor de $T(-1, 5)$? ¿Cómo se usa la hipótesis de que T es una transformación lineal?

Los estudiantes, luego de este trabajo, deberían poder escribir a $T(-1, 5)$ como una combinación lineal de $T(-1, 1)$ y $T(1, 1)$. Más precisamente, se tiene que
$T(-1, 5) = \alpha T(1, 1) + \beta T(-1, 1)$, donde $\alpha = 2$ y $\beta = 3$.

Seguidamente, se les pide que resuelvan el ítem b) del punto 4. El trabajo es similar al del ítem anterior. La dificultad que puede surgir es que no sepan cómo encontrar α, β para que (x, y) se escriba como la combinación lineal

$$(x, y) = \alpha(1, 1) + \beta(-1, 1).$$

Si esto sucede, guiarlos preguntándoles cómo se puede resolver la igualdad anterior mediante un sistema de ecuaciones lineales. Como T es una transformacion lineal, se tiene que $T(x, y) = \alpha T(1, 1) + \beta T(-1, 1)$.

La transformación lineal T estaría definida de la siguiente manera:

$$T(x, y) = \left(\frac{3y - x}{2}, \frac{y - 5x}{2}\right).$$

A continuación se propone a los estudiantes que encuentren una matriz A tal que se pueda reescribir a T como

$$T(x, y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Algunas preguntas para orientar este trabajo pueden ser las siguientes.

- ¿De qué tamaño es la matriz A?
- ¿Cuánto vale $T(1, 0)$ y $T(0, 1)$? ¿Qué información aportan dichas imágenes?

El docente puede mencionar que dicha matriz se llama *matriz canónica asociada a la transformación lineal T*. Este trabajo permite mostrar que una transformación lineal está bien definida si conocemos los valores que toma dicha función en una base del dominio.

Luego se puede proponer que resuelvan el punto 3 con un trabajo similar al 4. Para terminar este punto, se propone a los estudiantes que encuentren todos los (x, y) tales que $T(x, y) = (0, 0)$. No deberían tener dificultades con este punto, dado que fue trabajado anteriormente. El docente, entonces, da la siguiente definición.

Definición 6.2.1. *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Todos los elementos $v \in V$ tales que $T(v) = 0$ se llama el núcleo de T, y se lo denota* $\mathrm{Nu}(T)$.

Si el único v tal que $T(v) = 0$ es $v = 0$, entonces se dice que T es una transformación lineal inyectiva.

A modo de cierre de los conceptos de núcleo e imagen de una transformación lineal se puede dejar como tarea el punto 5 del problema modelo.

6.3. Autovalores y autovectores

Este problema modelo está pensado para trabajar con las nociones de autovalores y autovectores asociados a una transformación lineal. En una transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pueden moverse vectores en distintas direcciones, pero existen vectores especiales, sobre los cuales la acción de T resulta sencilla.

Más precisamente, se escribe T de la forma $T(v) = A \cdot v$, donde A es una matriz cuadrada llamada la matriz asociada a la transformación lineal. Una cuestión de importancia en distintos problemas de aplicación es encontrar vectores v tales que v y $A \cdot v$ sean paralelos.

Se dice que un vector no nulo v es un *autovector de* A si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $A \cdot v = k \cdot v$, o lo que es lo mismo, $T(v) = k \cdot v$. El número k se llama *autovalor de* A. El objetivo de este problema es encontrar autovalores y autovectores asociados a una transformación lineal y observar qué significa encontrar estos valores.

Problema modelo

1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, donde $A := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   a) Calcular $T(v)$, $T(w)$ con $v = (1, 0)$ y $w = (0, 1)$ y graficar los vectores v y w y sus transformados. ¿ Qué se observa? Escribir lo observado.
   b) ¿Qué pasa con los vectores de la forma $(k, 0)$ y $(0, k)$ para cualquier $k \in \mathbb{R}$ cuando le aplicamos T?
   c) ¿Cómo se puede calcular $T(1, 5)$ a partir de los ítems anteriores? Realizar gráficos para ver qué ocurre visualmente. Escribir las conjeturas encontradas.
2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
   a) Explorar cómo transforma T a distintos vectores.
   b) ¿Qué ocurre con los vectores $v = (1, 1)$ y $w = (1, -1)$?
   c) Indicar cuáles son los autovalores y los autovectores asociados a los autovalores encontrados.
3. Para cada una de las siguientes matrices, encontrar todos los autovectores reales y todos los autovalores asociados.

- $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.
- $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 27 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
   a) Encontrar todos los autovalores y autovectores de A.
   b) Tomar un autovalor y su autovector asociado encontrado en el ítem a. Llamar al autovalor elegido λ y al autovector asociado v. Probar que v es autovector de $B = A - 7 \cdot I$.
   c) Hallar el autovalor de B asociado al autovector v.
   d) Elegir cualquier autovector v de A ¿Es, también, autovector de B? ¿Qué relación hay entre el autovalor asociado a v de A con el autovalor asociado a v de B?

Una propuesta de trabajo es pedirles a los estudiantes resuelvan en grupos el punto 1. Este problema no debería traer dificultad alguna, ya que es muy parecido a lo trabajado anteriormente. Este punto motiva las definiciones de autovalor y autovector asociados a la matriz A.

Luego, se puede organizar el debate mediante las siguientes preguntas.

- ¿Cuánto da el transformado $T(v)$?
- Gráficamente, ¿qué ocurre con el vector v y su transformado?
- ¿Se puede generalizar lo anterior para cualquier múltiplo de v?
- ¿El conjunto de todos los vectores kv con $k \in \mathbb{R}$ forma un subespacio? Gráficamente, ¿que representa dicho conjunto?
- ¿Sucede lo mismo con w y su transformado?

A partir de este trabajo, se puede definir con los estudiantes los conceptos de autovalor y autovector asociado a una transformación lineal.

Definición 6.3.1. *Sean V y W dos espacios vectoriales reales. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal definida por $T(v) = A \cdot v$.*

Se dice que un vector no nulo v es un autovector de A *si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $A \cdot v = k \cdot v$. El número k se dice que es un autovalor de A.*

A continuación se puede trabajar con las siguientes preguntas:

- Con respecto al punto 1, ¿por qué se puede afirmar que v y w son los autovectores de la matriz A?
- ¿Cuáles son los autovalores asociados a A?

Entre todos pueden concluir que $v = (1, 0)$ y $w = (0, 1)$ son los autovectores de A asociados a los autovalores 3 y 2, respectivamente. Observar que v y $T(v)$ se encuentran en la misma recta. Lo mismo sucede con w y $T(w)$.

A partir de este trabajo, se pide que respondan las siguientes preguntas.

- ¿Es posible escribir al punto $(1, 5)$ como combinación lineal de los autovectores v y w? ¿Se puede encontrar α, β tal que $(1, 5) = \alpha v + \beta w$?
- ¿Cuáles son los valores de α y β del punto anterior?
- ¿Se puede escribir cualquier vector $u \in \mathbb{R}^2$ como combinación lineal de los autovectores v y w?

Luego, resuelven el punto 2. Los ítems a) y b) no deberían presentar ninguna dificultad. Pueden trabajar entre todos el ítem c). Es posible que este punto sí presente dificultades, por lo tanto se los puede guiar con algunas preguntas. Por ejemplo, ¿cuál es la definición de autovector de A? Antes de responder se les puede pedir que relean la definición dada. A continuación se les hace las siguientes preguntas orientadoras.

- ¿Cómo se puede traducir el problema de encontrar todos los $v \in \mathbb{R}^2$ no nulos tales que $A \cdot v = k \cdot v$ mediante la resolución de un sistema homogéneo?
- ¿Cuándo el sistema homogéneo $(A - k \cdot I) \cdot v = 0$ tiene infinitas soluciones?
- ¿Hay alguna manera de decidir si un sistema homogéneo tiene infinitas soluciones sin tener que encontrar dichas soluciones?

En este punto, los estudiantes, apelando a sus conocimientos previos, deberían poder relacionar el cálculo de autovectores v de la matriz A con la idea de determinar para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el determinante $\det(A - kI) = 0$. El docente puede hacerles las siguientes preguntas.

- ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el determinante anterior es igual a cero?
- ¿Cuáles son estos valores de k en relación con el problema de encontrar todos los $v \in \mathbb{R}^2$ no nulos tales que $A \cdot v = k \cdot v$?
- A partir de estos valores de k, ¿cómo encuentran todos los vectores v que verifican $A \cdot v = k \cdot v$?
- Un valor de k que cumple con la igualdad anterior es $k = 1$. ¿Cuántos vectores v no nulos cumplen con $A \cdot v = v$?

- ¿Los vectores que cumplen con la igualdad anterior forman un subespacio?

Con este trabajo se muestra de manera ordenada la técnica para encontrar autovectores y autovalores asociados a una matriz A. Por ejemplo, si quieren encontrar todos los vectores v no nulos tales que

$$A \cdot v = k \cdot v,$$

deben encontrar las soluciones no nulas del sistema homogéneo

$$(A - k \cdot I) \cdot v = 0.$$

Como dicho sistema homogéneo tiene la misma cantidad de ecuaciones que de incógnitas, para determinar que tiene infinitas soluciones, deberían poder encontrar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\det(A - k \cdot I) = 0.$$

Estos valores de k se llaman los *autovalores de A*. Luego, se puede reemplazar cada uno de esos valores en el sistema $A \cdot v = k \cdot v$, y encontrar todos los autovectores asociados a k.

Para calcular los autovalores reales de A hay que encontrar los valores de k que hacen que $\det(A - kI) = 0$. El docente puede mostrar que este problema equivale a encontrar las raíces reales del polinomio $f_A(k) = \det(A - k \cdot I)$. Dicho polinomio se llama el *polinomio característico de A*.

Se puede dejar como tarea el punto 3 del problema modelo y retomarlo la siguiente clase con la puesta en común de las resoluciones de los estudiantes. Otra propuesta de trabajo es que un alumno escriba la resolución en el pizarrón y, si fuera necesario, que entre todos se debata la manera de escribirla correctamente. Este punto permite repasar cómo se calculan autovalores y autovectores.

Por último, los estudiantes resuelven el punto 4. Se les da un tiempo para que encuentren los autovalores y autovectores, y después algunos comentan cómo calcularlos. A continuacion se dejan institucionalizados dichos valores.

Luego de este trabajo, responden las siguientes preguntas.

- ¿Cuál es el polinomio característico f_A asociado a la matriz A?
- ¿Qué grado tiene que tener?
- ¿Cuáles son las raíces reales de f_A?
- ¿Cuánto vale la suma de los autovalores? ¿Esta suma coincide con la suma de la diagonal de A?

- ¿Qué relación hay entre el producto de los autovalores y el determinante de A?

El polinomio característico asociado a A es

$$f(k) = \det\begin{pmatrix} 1-k & -1 \\ 2 & 4-k \end{pmatrix} = (1-k)(4-k)+2 = k^2-5k+6.$$

La suma de los autovalores es la suma de la diagonal de la matriz A (la traza de A) y el producto de los autovalores es igual al determinante de A. En este caso, la suma de los autovalores es 5, que corresponde al coeficiente lineal (con un cambio de signo) del polinomio característico y el producto de los autovalores que es 6 corresponde al término independiente.

Seguidamente, se les propone que tomen un autovalor de A y un autovector v, y que respondan los ítems b) y c). El docente debe trabajar las distintas respuestas. Un posible inconveniente para responder el punto b) es que no sepan cómo hacer una demostración. Si eso ocurre, se les puede proponer el siguiente ejercicio.

Ejercicio 6.3.2. *Tomar un autovalor k de A y un autovector asociado v.*

a) Escribir qué significa que k sea un autovalor de A y v sea su autovector asociado.

b) Demostrar que $(B-7I)\cdot v = \lambda v$.

c) ¿Cuál es λ?¿Qué relación hay entre λ y k?

Nota: Para un trabajo similar se pueden elegir los ejercicios 6.3.4, 6.3.5 y 6.3.7 del Libro para el estudiante.

6.4. Diagonalización

Una matriz A cuadrada se dice que es *diagonalizable* si se puede escribir de la forma $A = P\cdot D\cdot P^{-1}$, donde D es una matriz diagonal y P es inversible. A es una matriz diagonalizable de tamaño $n\times n$ si y solo si A tiene n autovectores linealmente independientes. Dicho de otro modo, si A es una matriz cuadrada de tamaño $n\times n$ con coeficientes reales, se tiene que es diagonalizable si y solo si existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de A. Se puede ver que si A es diagonalizable tiene n autovalores distintos. Más aún, la matriz diagonal D contiene en su diagonal todos los autovalores de A y la matriz P contiene en sus columnas todos los autovectores asociados a esos autovalores.

Los ejercicios del problema modelo están orientados a decidir si una matriz es diagonalizable o no y observar la importancia que tiene el hecho de que la matriz en juego es diagonalizable.

Problema modelo

1. Calcular A^{30} con $A := \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

   Sabiendo que A se escribe de la forma $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ donde $P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $D := \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, ¿es posible calcular A^{30} más fácilmente? ¿A tiene inversa? Si es así, ¿cuánto vale la inversa de A? ¿Qué relación hay entre $\det(A)$ y el $\det(D)$?

2. Dada la matriz $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, se pide

   a) Encontrar los autovalores de A.

   b) ¿Cuáles son los autovectores asociados a A?

   c) ¿Los autovectores son linealmente independientes? ¿forman una base?

   d) Escribir una matriz diagonal D con los autovalores encontrados

   e) Encontrar una matriz P tal que $A \cdot P = P \cdot D$.

   f) ¿Cuáles son las columnas de la matriz P?

   g) ¿La matriz P es inversible?

   h) A partir de las matrices P y D de los ítems anteriores, escribir $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

   i) Calcular los polinomios característicos $p_A(k)$ de A y $p_D(k)$ de D, ¿cómo son las raíces?

   j) Calcular los autovalores y autovectores de D y relacionarlos con los de la matriz A.

   Repetir lo anterior para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Las matrices cuadradas A que se pueden escribir de la forma $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, con P inversible y D diagonal, se llaman matrices diagonalizables.

3. Diagonalizar, si es posible, $A := \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

El punto 1 del problema modelo destaca la importancia de tener una matriz diagonalizable. Proponer a los estudiantes que intenten calcular A^{30} solamente con la información de A.

Algunos estudiantes usarán Geogebra. Observarán que los valores de los elementos son grandes. Se les puede proponer que calculen A^{30000}. Van a darse cuenta de que no se puede calcular con Geogebra debido a que los elementos de la matriz son enormes.

Luego, indicarles que intenten calcular A^{30} usando la información de que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ con D matriz diagonal y P matriz inversible. Estas son algunas preguntas para trabajar este punto.

- Sabiendo que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, ¿cuánto vale A^2?
- ¿Para calcular A^2 es necesario elevar al cuadrado las matrices P y su inversa?
- A partir de los ítems anteriores, ¿cómo se puede calcular A^3 o A^{10}? ¿Cómo se puede calcular A^{30}?

A continuación de este trabajo, se les pide que resuelvan en grupos el punto 2. En la puesta en común se presentan todas las respuestas. Este problema motiva la definición de matrices diagonalizables y permite dar un criterio para decidir cuándo la matriz en cuestión es diagonalizable o no. A continuación se proponen preguntas para guiar el debate.

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

- ¿Son distintos los autovalores de A? ¿Cuáles son?
- ¿Cuáles son los autovectores asociados a cada uno de los autovalores de A?
- ¿Es posible que los autovectores sean linealmente independientes? ¿Por qué?¿forman una base de $\mathbb{R}^2$?
- Si las columnas de la matriz P son los autovectores asociados a los autovalores de A, y estos son linealmente independientes, entonces ¿puede ser que esta no sea inversible?
- ¿Es posible escribir A como un producto de matrices de la forma $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$?

Se pueden repetir las mismas preguntas para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Finalmente, se construye la definición de matrices diagonalizables.

Definición 6.4.1. *Una matriz cuadrada se dice diagonalizable si se puede escribir de la forma $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, donde P es una matriz inversible y D es una matriz diagonal.*

Seguidamente, se presentan preguntas para cada una de las matrices del punto 2.

- ¿La matriz A es diagonalizable? Si lo es, ¿cuáles son las matrices P y D?
- ¿Cuáles son los elementos de la diagonal de D? ¿Cuáles son las columnas de la matriz P?

Debe quedar institucionalizado que la primera matriz A es diagonalizable y que la segunda matriz A no lo es.

Otras preguntas orientadoras son las siguientes:

- ¿Los autovectores asociados a los autovalores de la matriz diagonalizable son linealmente independientes? ¿Sucede lo mismo con los autovectores de la matriz que no es diagonalizable?
- ¿Son distintos los autovalores de A cuando esta es diagonalizable? ¿Sucede lo mismo con la matriz no diagonalizable?

Para finalizar, dar la siguiente propiedad:

Proposición 6.4.2. *Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Se dice que A es diagonalizable si y solo si tiene n autovectores linealmente independientes.*

Para cerrar el punto 2, se les puede proponer a los estudiantes que resuelvan los ítems i), k). Se puede realizar las siguientes preguntas, que pueden orientar la puesta en común o el trabajo en los grupos:

- Para la matriz A diagonalizable, ¿cuánto vale el polinomio característico $p_A(k)$? ¿coincide este con la de la matriz diagonal D formada por los distintos autovalores de A?
- Si los polinomios característicos $p_A(k)$ de A y $p_D(k)$ de D coinciden, ¿se puede decir que D tiene los mismos autovalores?
- Si el polinomio característico $p_A(k)$ de A coincide con el de la matriz diagonal D, ¿se puede decir que A es diagonalizable?

Este trabajo motiva la siguiente propiedad:

Proposición 6.4.3. *Si A es diagonalizable, es decir si existen matrices P inversible y D diagonal tal que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, entonces $p_A(k) = p_D(k)$, donde $P_A(k)$ es el polinomio característico de A y $p_D(k)$ es el de D.*

En el punto 3 se les puede preguntar ¿qué significa diagonalizar una matriz? Proponer que resuelvan este punto de tarea.

Nota: Se puede proponer el ejercicio 6.5.2 del Libro para el estudiante para hacer un trabajo similar al aquí realizado.

CAPÍTULO

7

Vectores en el plano y en el espacio

Los problemas modelo de este capítulo se diseñaron para trabajar *Vectores en el plano y el espacio.*

Los temas de esta unidad son:

1. Vectores en el plano y el espacio.
2. Operaciones entre vectores.
3. Rectas en el plano y el espacio.
4. Planos en el espacio.
5. Paralelismo, perpendicularidad e intersección de rectas y planos.

Y sus objetivos son:

- Introducir el concepto de vector en el plano y el espacio y sus operaciones.
- Entender el vínculo existente entre la geometría y el álgebra, el uso de las ecuaciones para modelizar objetos geométricos y estudiar sus propiedades.
- Introducir el concepto de recta y plano en el espacio desde el punto de vista vectorial.
- Describir rectas y planos mediante representaciones gráficas y ecuaciones.
- Modelizar y resolver problemas geométricos que involucran puntos, rectas y planos.

7.1. Vectores y sus primeras operaciones

El siguiente problema introduce la noción de vector en el plano y en el espacio, y trabaja con las primeras operaciones entre vectores, tales como la suma, la resta y la multiplicación por escalar. Este concepto ya fue estudiado cuando se pensaba un vector como una matriz con una fila o una columna; en este capítulo se le da una mirada geométrica.

Problema modelo

1. Sean los puntos $A = (1,3)$, $B = (5,2)$ y $C = (2,7)$ en el plano.
   a) Graficar los puntos A, B y C, y los vectores $v = AB$ y $w = AC$ en un sistema de ejes cartesianos.
   b) Dibujar el vector que tenga la misma dirección, sentido y módulo que el vector v con origen en el origen de coordenadas. Llamarlo v_0. ¿Qué coordenadas tiene v_0? ¿Qué relación tienen esas coordenadas con el vector v?
   c) Dibujar el vector w_0 con origen en $(0,0)$, y que con la misma dirección, sentido y módulo que el vector w. ¿Qué coordenadas tiene?
   d) Calcular las componentes del vector $u = BA$. Llamar u_0 a ese vector, cuyo origen es el origen de coordenadas.
   e) ¿Cuánto miden los vectores v_0 y u_0? ¿Se trata del mismo vector? ¿Por qué?
   f) ¿Cómo son los vectores v_0 y w_0?
   g) Dar tres vectores distintos perpendiculares a v_0.
   h) ¿Cómo se puede usar el Teorema de Pitágoras para ver que v_0 y w_0 son perpendiculares (u ortogonales)?
2. Sean $v := (1,2)$, $w := (-1,2)$ y $u := (1,1)$.
   a) Graficar cada uno de los vectores.
   b) Graficar las siguientes operaciones y luego calcular analíticamente.

$$v + w, \quad (v + w) + u, \quad \frac{1}{2}v, \quad v - w, \quad (v - w) + u$$

3. a) Encontrar un vector $v := (x, x + 2)$ tal que $v + (1,1) = (2,4)$.
   b) Hallar a y b tal que $2(a,-1) + (1,-3) = (5,-b)$.
4. a) Dibujar en un sistema de coordenadas y ubicar los puntos cuyas coordenadas son
      - $(2,3,4)$, $(-2,3,4)$ y $(2,3,-4)$.
      - $(0,2,0)$, $(0,0,-2)$.
   b) Graficar los siguientes vectores que pasan por el origen de coordenadas $v = (1,2,3)$, $w = (0,0,1)$ y $u = (-1,0,0)$.

El objetivo de presentar este problema es abordar el concepto de vectores desde un punto de vista geométrico. Los estudiantes trabajarán en grupos con los ítems a), b) y c) del punto 1. Allí se les pide construir dibujos con Geogebra, apoyándose en todo lo trabajado anteriormente. Si algún grupo no sabe cómo hacerlo, orientarlo con las siguientes preguntas:

- ¿Qué quiere decir que los vectores v y v_0 tengan la misma dirección?
- Si tienen un segmento y quieren dibujar otro con la misma dirección pero en otro lugar, ¿qué figura geométrica pueden usar para hacerlo?
- ¿Cómo dibujarían el vector v_0 que pasa por el origen y con la misma medida que v?
- ¿Qué figura geométrica tienen que dibujar para tener todos los puntos que están a la misma distancia de otro punto fijo?

En la puesta en común se debería formalizar el concepto de componentes de un vector y la noción de vectores equivalentes. Estas preguntas están pensadas para orientar la construcción de la definición de coordenadas de un vector:

- ¿Cuáles son las coordenadas del vector v_0?
- ¿Hay una relación entre las coordenadas del vector v_0 y el vector v?
- ¿Cuáles son los extremos del vector v?
- ¿Qué operaciones se pueden hacer entre A y B, sus extremos, para que coincida con las coordenadas del vector v_0?

Definición 7.1.1. *Se dice que los componentes de un vector son sus proyecciones en cada uno de los ejes cartesianos. Si tenemos un vector $v = AB$ donde $A = (a, b)$ y $B = (c, d)$, entonces la componente x del vector v es $x = c - a$ y la componente y del vector es $y = d - b$; es decir $v = (c - a, d - b)$.*

Así, las componentes de v son $B - A = (4, -1)$. El docente debe hacer notar a los estudiantes que el vector v_0 que sale de $(0, 0)$ y tiene extremo final en el punto $(4, -1)$ es un vector que tiene la misma dirección, sentido y módulo que el vector v. Ambos vectores son equivalentes. Se les puede preguntar también ¿cómo se puede calcular el módulo de un vector?¿cuánto mide v_0 y w_0?

Luego, los estudiantes deben encontrar los componentes de u, lo que no debería presentar ninguna dificultad. Seguidamente, se puede trabajar entre todos los últimos ítems del punto 1. Si algún alumno dice que los vectores u_0 y v_0 son equivalentes, el docente debe preguntarle cuáles son los sentidos de estos vectores.

Luego, abordar el ítem f) del punto 1. Para ello, proponerles que dibujen con Geogebra los vectores v_0 y w_0 y observar sus posiciones en la gráfica. Los estudiantes, seguramente, dirán que son perpendiculares, por lo que se les puede pedir que justifiquen tal afirmación. Algunos, usando la herramienta ángulo, mostrarán que el ángulo que se forma entre los extremos de los vectores v_0 y w_0 con el origen $(0, 0)$ es recto. Si eso ocurre, se les puede preguntar cómo se puede hacer una demostración sin apoyarse en Geogebra, pregunta que permitirá al docente trabajar con el Teorema de Pitágoras y su uso para demostrar que dos vectores son perpendiculares.

Este trabajo necesitará la construcción de la siguiente definición:

Definición 7.1.2. *Sean $A = (a, b)$ y $B = (c, d)$ dos puntos de $\mathbb{R}^2$. La distancia de los puntos A y B se define como*

$$d(A, B) = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}.$$

A partir de aquí y tomando los vectores $v_0 = (4, -1)$ y $w_0 = (1, 4)$, preguntar:

- ¿Cómo se puede mostrar que el ángulo entre v_0 y w_0 es recto?
- ¿Cómo es el triángulo formado por los lados $||v_0||$, $||w_0||$ y $d((4, -1), (1, 4))$? ¿Cómo se calcula la distancia $d((4, -1), (1, 4))$?
- ¿Cómo se puede usar el Teorema de Pitágoras para resolver el problema?

En el punto 2 deben graficar y calcular analíticamente suma o resta de vectores, y multiplicación escalar de un número por un vector. Este concepto ya se vio, por lo cual los estudiantes no deberían tener problemas para resolverlo. El docente puede trabajar con ellos la manera gráfica de representarlos y, para orientarlos, se puede hacer las siguientes preguntas.

- A partir del vector v, ¿cómo graficar el vector $\frac{1}{2}v$? ¿Qué relación hay entre sus módulos?
- ¿Cómo dibujar el vector $v + w$ a partir de los vectores v y w? ¿Qué representa gráficamente el vector suma? ¿Es posible dibujar el paralelogramo de lados no consecutivos v y w?
- Sabiendo que $v - w = v + (-w)$, ¿qué representa, gráficamente, dicha operación?

Seguidamente, los estudiantes resuelven en grupos los puntos 3 y 4, que presenta el concepto de igualdad de vectores. Para colaborar con quienes no puedan resolverlos, pedirles que expliquen cuándo dos vectores son iguales, cuándo sucede esto, y proponerles que grafiquen puntos y vectores con Geogebra 3D.

7.2. Operaciones entre vectores

Este problema modelo está pensado para trabajar con los conceptos de módulo o norma y ángulo entre vectores, y sus propiedades, como así también el producto escalar y el producto vectorial, algunos de los cuales ya fueron tratados.

Problema modelo

1. Sea $v = (1, 2)$ un vector en el plano.
   a) ¿Cuánto vale $||v||$?
   b) Calcular $w = \frac{v}{||v||}$. ¿Qué norma tiene?
   c) Dado $v = (a, b)$, ¿qué norma tiene el vector $w = \frac{v}{||v||}$?
   d) ¿Qué propiedad se puede mencionar a partir de los cálculos realizados?
2. Dado un vector v en el plano,
   a) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ resulta que la norma de $k \cdot v$ es mayor que la norma de v?
   b) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ se tiene que la norma de $k \cdot v$ es 1?
3. Sea el vector $v = (1, 2)$.
   a) Encontrar otro vector w perpendicular a v.
   b) ¿Cómo se puede usar el Teorema de Pitágoras para ver que v y w son perpendiculares?
   c) Dados $v = (a, b)$ y $w = (c, d)$ dos vectores del plano, dar condiciones para que v y w sean perpendiculares a partir de los cálculos realizados arriba.
4. Graficar los vectores $v = (1, 1)$ y $w = (1, \sqrt{3})$.
   a) Hallar los ángulos que forman cada uno de los vectores con el eje horizontal.
   b) Utilizar el resultado anterior para hallar el ángulo que forman los vectores v y w.
   c) ¿Se puede calcular el ángulo formado por los vectores v y w de otra manera?
5. Determinar un vector unitario en la misma dirección que $v := (3, 4)$.
6. a) Calcular m para que el vector $v := (1, 3, m)$ sea ortogonal al vector $w := (1, -2, 3)$.
   b) Encontrar un vector ortogonal a $u := (1, -1, 0)$ y $v := (2, 0, 1)$ ¿Cuántos vectores hay de módulo 1?
7. Siendo $u := (1, 2, 3)$ y $v := (1, -2, 3)$ y $w := (1, 5, 2)$. Calcular

$$v \times w, \quad w \times (u + v), \quad (v \times w) \cdot v$$

.

En la puesta en común de los puntos 1 y 2 se recuperan las respuestas de los estudiantes con el fin de encontrar algunas regularidades que permitirán conjeturar ciertas propiedades.

Los estudiantes aprendieron a calcular la norma de un vector cuando estudiaron números complejos. Igualmente, el docente puede proponer estas actividades y preguntas orientadoras:

- ¿Cómo se puede calcular la norma o medida de un vector?
- Si ese vector está dibujado y se presta atención a sus proyecciones en los ejes X e Y, se observa un triángulo rectángulo dibujado. ¿Qué representa la medida del vector v en dicho triángulo rectángulo?
- ¿Qué relación hay entre la norma de v y la norma de w?
- ¿La respuesta anterior sucede para cualquier vector v? Dar algunos ejemplos.
- Si la respuesta anterior es afirmativa, tomar un vector $v = (a, b)$ y enunciar todos los pasos necesarios para encontrar un vector en la misma dirección que v pero de norma 1. ¿Cómo se puede demostrar que dicho vector es de norma 1?
- ¿Cómo se puede encontrar un vector de norma 1 que tiene la misma dirección que v pero tiene distinto sentido?

El docente, finalmente, escribe en el pizarrón la siguiente propiedad:

Proposición 7.2.1. *Sea $v = (a, b)$ un vector en el plano, entonces el vector $w = \frac{v}{||v||}$ tiene norma* 1.

Los vectores que tienen norma 1 se llaman vectores unitarios.

El ítem 2 se puede resolver explorando con Geogebra. Proponer un vector v cualquiera y distintos valores de k. A partir de este trabajo, los estudiantes deberían conjeturar que si $k < -1$ o $k > 1$, entonces la norma de $k \cdot v$ es mayor que la de v. En el caso contrario, la norma es más pequeña. Si alguien no puede resolver el ítem 2 b), se le pide que relea el trabajo realizado en el ítem a). Debería formalizarse que, para que el vector de $k \cdot v$ sea unitario, debe ocurrir que $|k| = \frac{1}{||v||}$.

Las siguientes consignas son una guía para resolver el punto 3 del problema modelo:

- ¿Cómo se puede encontrar un vector perpendicular a v?
- ¿Cuántas rectas perpendiculares a v se pueden dibujar?
- Elegir un vector perpendicular a v y llamarlo w.
- ¿Cómo se puede demostrar que v y w son perpendiculares?

Para responder la primera pregunta, los estudiantes pueden usar la herramienta recta perpendicular de Geogebra y dibujar la recta perpendicular a aquella que pasa por v, y que pasa por el $(0,0)$. En dicha recta pueden tomar cualquier vector. Seguramente, los estudiantes dirán que son perpendiculares porque así los dibujaron. El docente debe pedirles, entonces, que lo demuestren usando el Teorema de Pitágoras. Nuevamente, se incluyen preguntas de orientación:

- ¿Qué cuenta hay que hacer para demostrar que v y w son los catetos de un triángulo rectángulo?
- ¿Cómo se puede calcular la medida del segmento que se forma entre v y w?

Se puede definir ahora la distancia entre dos puntos, en este caso, la distancia entre los extremos finales de los vectores v y w. Esta definición ya fue tratada en el problema modelo anterior.

En el pizarrón debería quedar formalizado que, para que los vectores v y w sean perpendiculares, debe ocurrir que correspondan a los catetos de un triángulo rectángulo. Usando Pitágoras, la condición suficiente y necesaria para que esta situación ocurra es que $d(v,w)^2 = ||v||^2 + ||w||^2$.

Docente y estudiantes pueden trabajar con vectores generales $v = (a,b)$ y $w = (c,d)$ y encontrar condiciones necesarias y suficientes para que resulten perpendiculares.

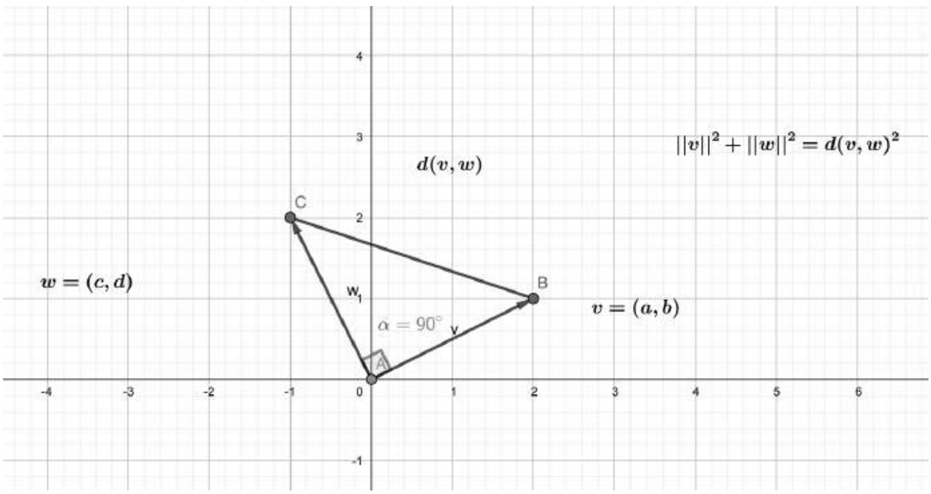


Figura 7.1

Para determinar si dos vectores $v = (a,b)$ y $w = (c,d)$ son perpendiculares u ortogonales, hay que probar que

$$d(v,w)^2 = ||v||^2 + ||w||^2. \tag{7.1}$$

Por un lado,

$$d(u,v)^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2 = a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - 2(a \cdot c + b \cdot d).$$

Por otro lado,

$$||v||^2 = a^2 + b^2, \quad ||w||^2 = c^2 + d^2.$$

Igualando estas igualdades con (7.1), se deduce que

$$a \cdot c + b \cdot d = 0.$$

De aquí se puede dar la siguiente definición, que permite definir una nueva operación entre vectores.

Definición 7.2.2. *Sean $v = (a,b)$ y $w = (c,d)$ dos vectores. Se define el producto interno entre v y w y se lo denota con $v \cdot w$ al número real*

$$v \cdot w = a \cdot c + b \cdot d.$$

Se llega a la siguiente proposición:

Proposición 7.2.3. *Sean v y w dos vectores en el plano o el espacio. Se dice que v y w son perpendiculares u ortogonales si y solo si $v \cdot w = 0$.*

A continuación, proponer a los estudiantes que calculen el producto interno entre vectores y decidan si son ortogonales o no. Dar algunos ejemplos de vectores ortogonales y otros que no lo sean.

Después, se puede trabajar con la construcción de otro concepto relacionado con vectores: el de ángulo determinado por dos vectores.

Pedir a los estudiantes que resuelvan el punto 4 y en la puesta en común trabajar con sus respuestas. Algunos harán una construcción con Geogebra y observarán el ángulo determinado por v y el eje X, y el ángulo determinado por w y el eje X. Otros estudiantes recurrirán a razones trigonométricas para calcular dichos ángulos. Entonces, que expliquen cómo se calcula, a partir de estos ángulos, el ángulo determinado por los vectores v y w. Escribir en el pizarrón todas las justificaciones dadas.

A partir de este trabajo, se llega a construir la definición de ángulo γ entre dos vectores u y v cualesquiera.

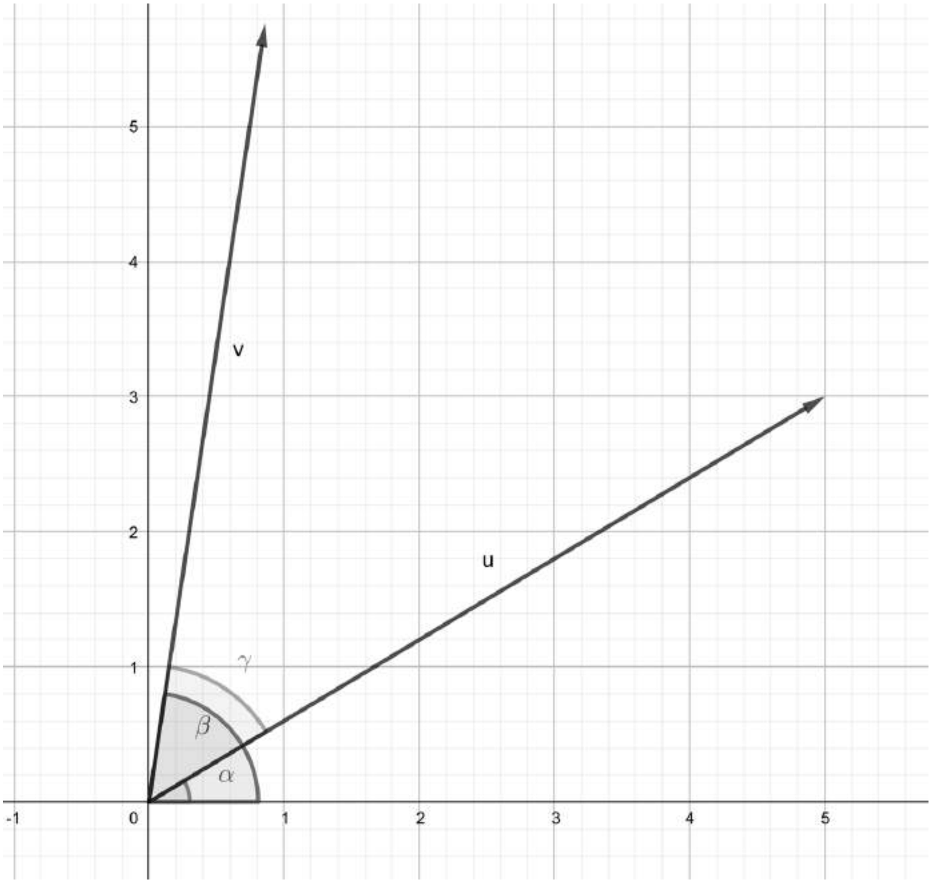


Figura 7.2

Supongamos que $u = (a, b)$ tiene ángulo α y $v = (c, d)$ tiene ángulo β. Por razones trigonométricas, se sabe que

$$cos(\alpha) = \frac{a}{||u||}, \quad sen(\alpha) = \frac{b}{||u||}. \tag{7.2}$$

De la misma manera,

$$cos(\beta) = \frac{c}{||v||}, \quad sen(\beta) = \frac{d}{||v||}. \tag{7.3}$$

Por otro lado, el ángulo entre los vectores u y v es el ángulo $\gamma = \beta - \alpha$. Observar que

$$cos(\gamma) = cos(\beta)cos(\alpha) + sen(\alpha)sen(\beta).$$

Así, reemplazando (7.2) y (7.3) en la igualdad anterior, se deduce la siguiente definición:

Definición 7.2.4. *El ángulo entre dos vectores v y u se define como el ángulo γ tal que $0 \leq \gamma < 180^o$ y tal que*

$$cos(\gamma) = \frac{v \cdot u}{||v||||u||}.$$

Con la construcción de esta definición, indicarles a los estudiantes que calculen el ángulo de los vectores v y w del punto 4.

Los puntos 5 y 6 a) son útiles como tarea ya que permiten repasar todo lo explicado. En el punto 6 b) se introduce la noción de producto vectorial de vectores en el espacio. Si algún grupo no puede resolverlo, orientarlo con las siguientes preguntas:

- ¿Qué operación vectorial permite determinar si dos vectores son ortogonales?
- ¿Cuáles son los datos? ¿Cómo usar el ítem anterior para encontrar los vectores $w = (a, b, c)$ de manera que w sea ortogonal a u y w sea ortogonal a v?
- ¿Qué figura geométrica dibujan todos los w ortogonales a v y a u a la vez?
- ¿Cuántos vectores de norma 1 ortogonales a v y u hay?

A continuación, se define la noción de producto vectorial entre dos vectores $u = (a, b, c)$ y $v = (d, e, f)$, vectores de $\mathbb{R}^3$:

Definición 7.2.5. *Sean $u = (a, b, c)$ y $v = (d, e, f)$ dos vectores en el espacio $\mathbb{R}^3$. Se define el producto vectorial entre u y v como*

$$u \times v = \left(\det \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \right).$$

Luego, proponer a los estudiantes las siguientes consignas:

- Dados los vectores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$, ¿cuánto valen $e_1 \times e_2, e_2 \times e_3$ y $e_3 \times e_1$?
- Dar vectores ortogonales a e_1 y e_2 a la vez.
- Resolver el punto 6b) usando la definición.

Por último, pedir que, en grupos, resuelvan el punto 7 de manera analítica y con Geogebra. El docente debe indicar que en Geogebra se puede calcular y ver el gráfico usando el comando $Productovectorial[u, v]$.

Nota: Se pueden usar los ejercicios 7.2.11, 7.2.16 y 7.2.18 del Libro para el estudiante para hacer un trabajo similar al aquí propuesto.

7.3. Rectas en el plano y el espacio

El siguiente problema modelo introduce los conceptos de rectas en el plano y en el espacio, y sus representaciones.

Problema modelo

1. Dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$, ¿qué sucede cuando se lo multiplica por distintos valores reales $\lambda \in \mathbb{R}$? Construir ejemplos.
2. Graficar e indicar qué representa los puntos del plano que son de la forma $\lambda \cdot (1,2) + (0,1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. ¿El punto $(2,6)$ pertenece al gráfico realizado? ¿Por qué? ¿Y el punto $(1,3)$?
3. a) ¿Qué sucede con la recta de ecuación $(x,y) = k \cdot (1,3)$ con $k \in \mathbb{R}$ cuando se le suma el vector $(-1,2)$ de modo que la nueva ecuación sea $(x,y) = k \cdot (1,3) + (-1,2)$?
   b) ¿Se puede asegurar que la recta L de ecuación $(x,y) = k \cdot (1,3) + (-1,2)$ pasa por el punto $(1,3)$? ¿Y por el punto $(-1,2)$?
4. Sean los puntos $P = (1,2)$ y $Q = (3,5)$ en $\mathbb{R}^2$, la recta L que pasa por P, Q y el vector $v = PQ$.
   a) Dado el vector v_0 paralelo al vector v pero con origen en el origen de coordenadas. ¿Cómo son la recta L y el vector v_0?
   b) Indicar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: “Un punto R de $\mathbb{R}^2$ pertenece a la recta L si y solo si el vector formado por los puntos P y R es paralelo al vector v_0”.
5. Sea la recta L que pasa por los puntos $P = (1,3,-2)$ y $Q = (2,1,-2)$. Hallar la ecuación que pasa por el punto P en la dirección del vector $v = PQ$. Esta forma de escribir la recta se llama *forma vectorial de la recta*. ¿Existen otras maneras de describir la recta L?

Los puntos 1 y 2 posibilitan a los estudiantes conocer otra manera de representar una recta en el plano, descripción posible a través de la noción de vectores directores. Para quienes no sepan cómo resolver el primer punto, indicarles que lo resuelvan usando Geogebra. Algunas consignas para comenzar el debate en la puesta en común:

- Dar un ejemplo de un vector v en el plano.
- ¿Qué ocurre cuando se lo multiplica por un número real λ?
- ¿Qué describe el conjunto de todos los puntos $\lambda \cdot v$?
- ¿Sucede lo mismo con cualquier vector v?

Para debatir el punto 2, estas actividades resultan orientadoras:

- ¿Qué describe el conjunto de todos los puntos $B_\lambda := \lambda \cdot (1,2)$?

- ¿Qué relación hay entre el conjunto de los puntos B_λ y el de los puntos $L := B_\lambda + P$?
- Dar tres puntos distintos del conjunto L.
- ¿El punto $(2, 6)$ se encuentra en L? ¿Y el punto $(1, 3)$ se encuentra en L?

Queda como tarea el punto 3, ya que la solución es parecida a la de los puntos 1 y 2.

El punto 4 permite construir la representación vectorial de una recta en el plano. El docente puede proponer que hagan un dibujo con Geogebra y, a partir de esta representación, escriban la recta L. El debate orientado tiene como finalidad construir la definición de recta escrita en su representación vectorial:

- ¿Cómo se puede calcular el vector v_0, vector paralelo a v pero que pase por el origen?
- ¿Cómo es la recta L y la recta $k \cdot v_0$ con $k \in \mathbb{R}$?
- A partir del paralelismo de la recta L y la recta $k \cdot v_0$, ¿cómo se describe la recta L, recta que pasa por P, pero en la dirección del vector v?

Respecto de la definición de recta escrita en su forma vectorial, se la puede construir de dos maneras. Ambas construcciones están apoyados en el trabajo con los puntos 1 a 4. Sean P y Q dos puntos de $\mathbb{R}^2$, para describir la recta L que pasa por los puntos P y Q, o dicho de otra manera la recta que pasa por P en la dirección de $v = PQ$ se puede observar los siguiente (se puede apoyar el trabajo en el gráfico).

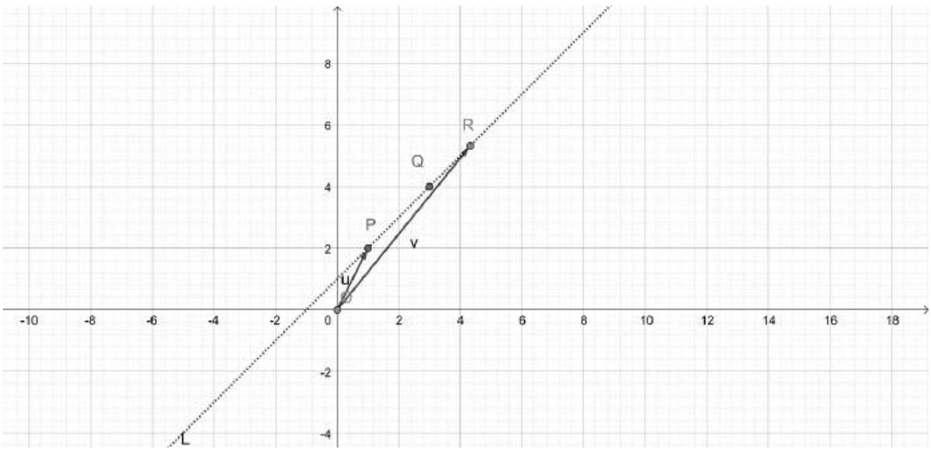


Figura 7.3

Un punto $R = (x, y)$ pertenece a L si y solo si el vector OR verifica que $OR = OP + PR$. Por otro lado, PQ y PR son paralelos, por lo que $PR = k \cdot PQ$, es decir $PR = k \cdot v$ donde $v = Q - P$. Por lo tanto, $(x, y) \in L$ si y solo si $R - P = k \cdot v$, o sea tenemos que $(x, y) = k \cdot v + P$.

Definición 7.3.1. *Sea L la recta que pasa por el punto P en la dirección de $v = PQ$. Entonces, la representación vectorial de esa recta es*

$$L := (x, y) = k \cdot (Q - P) + P.$$

La segunda manera de describir la recta L es la siguiente: un punto $R = (x, y) \in L$ si y solo si el vector PR es paralelo al vector $v_0 = Q - P$, e decir $R - P = k \cdot (Q - P)$.

A continuación, resolver el punto 5 basándose en las definiciones vistas y trabajar luego con todas las posibles representaciones de la recta de ese punto. Algunas preguntas para ordenar el debate acerca de la construcción de una recta en el espacio son:

- ¿Cuál es el vector v_0 paralelo a v que pasa por el origen de coordenadas?
- ¿Qué dibujan todos los puntos $k \cdot v_0$, con $k \in \mathbb{R}$?
- A partir de la descripción anterior, ¿cómo encontrar la recta L?

7.4. Planos en el espacio

El concepto de plano en el espacio se trabajó antes, pero aquí se le da un enfoque geométrico a partir de las nociones de vectores y producto vectorial.

Problema modelo

1. Para construir una recta en $\mathbb{R}^3$ se necesitan dos puntos. ¿Cuántos puntos es necesario conocer para construir un plano? ¿Cómo deben ser esos puntos? ¿Pueden pertenecer a una misma recta?
2. a) Proponer un vector perpendicular a $(1, 3, 1)$. ¿Cuántos más hay? ¿Cómo se los puede describir geométricamente? Pueden apoyarse usando una herramienta gráfica.

   b) Proponer un vector perpendicular a $(1, 3, 1)$ y $(2, 1, 2)$. ¿Cuántos pueden encontrar? ¿Cómo se los describiría geométricamente?
3. Sean los puntos $P = (0, 0, -1)$, $Q = (1, 2, 1)$ y $R = (1, 4, 4)$ en $\mathbb{R}^3$.

   a) Demostrar que P, Q y R no pueden estar en una misma recta. Observar que estos puntos pertenecen a un plano, que lo llamamos Π.

b) Considerar los vectores $v = PQ$ y $w = PR$ y calcular un vector ortogonal a v y a w, llamarlo N.

c) Si se considera otro punto cualquiera $S = (x, y, z)$ del plano Π, ¿qué tiene que ocurrir con el vector $u = PS$ y N?

d) A partir de la solución del ítem anterior dar una descripción analítica del plano Π.

4. Sean los puntos de $\mathbb{R}^3$ que cumplen con la siguiente ecuación:

$$(x, y, z) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(-3, 1, 2) \tag{7.4}$$

a) Proponer dos puntos que pertenezcan a (7.4).

b) Encontrar un vector perpendicular a cualquier vector de (7.4).

c) ¿Cómo se pueden trasladar todos los puntos de (7.4) pero que pasen por el punto $(0, 0, 1)$?

Los ejercicios de los puntos 1 y 2 introducen la noción de plano en $\mathbb{R}^3$ de manera vectorial. Para el primero, los estudiantes, apoyados en la herramienta computacional, van a conjeturar que con dos puntos no se puede generar un plano, sino que se necesitan por lo menos tres, y estos no pueden pertenecer a la misma recta.

Si bien no deberían surgir dificultades para resolver el punto 2, ya que trabajaron con estos conceptos antes, quizá sea necesario plantear preguntas orientadoras:

- ¿Qué operación matemática permite determinar todos los vectores ortogonales a uno dado?
- ¿Qué operación matemática permite determinar todos los vectores ortogonales a dos vectores dados?
- ¿Qué figuras geométricas describen los dos ítems anteriores?

Con respecto al punto 3, el ejercicio permite construir planos en el espacio. En la puesta en común deben presentarse todas las respuestas posibles del ítem 3 a).

Algunos intentarán escribir la recta que pasa por los puntos P y Q, y luego observarán que el punto R no está en dicha recta.

Otra posibilidad es que construyan los vectores $v = PQ$ y $w = PR$, y determinen si son paralelos, es decir, que intenten encontrar un $k \in \mathbb{R}$ tal que $(Q - P) = k \cdot (R - P)$.

Por último, el docente puede explicar que otra manera para decidir si los puntos $P = (0, 0, -1)$, $Q = (1, 2, 1)$ y $R = (1, 4, 4)$ no están en la misma recta es ver que son linealmente independientes. Para ello, mostrar que el determinante de la matriz con filas P, Q y R es distinto de cero.

Una actividad adicional es que respondan recurriendo a Geogebra: ¿cómo se puede ver que los puntos P, Q y R pertenecen a un mismo plano?

El ítem 3 b) no debería traer ninguna dificultad, pues ya se estudió la noción de producto vectorial, además de haber sido trabajada en el otro punto.

Si algún estudiante tiene dificultades con la respuesta del punto 3 c), se indicarle que explore con Geogebra. Debería visualizar que cualquier vector $u = PS$ del plano es ortogonal a N. Luego de este trabajo, se construye la definición de plano en el espacio.

Una manera posible de obtener un plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos P, Q y R es observar que cualquier punto $S = (x, y, z)$ pertenece a Π si y solo si el vector PS es perpendicular a N, donde $N = PQ \times PR$. Dicho de otra manera,

$$(x, y, z) \in \pi, \quad \Leftrightarrow \quad (S - P) \cdot N = 0,$$

donde $N = PQ \times PR$.

El punto 4 se da como tarea y se lo retoma la clase siguiente. Se puede observar que $(x, y, z) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(-3, 1, 2)$ representa un plano que pasa por el origen de coordenadas y sus vectores directores son $(1, 0, -1)$ y $(-3, 1, 2)$. Para encontrar el plano que pase por el punto $(0, 0, 1)$, hay que $\alpha(1, 0, -1) + \beta(-3, 1, 2) + (0, 0, 1)$, es decir, trasladar el plano $(x, y, z) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(-3, 1, 2)$ de manera paralela para que pase por el punto $(0, 0, 1)$.

7.5. Paralelismo, perpendicularidad e intersección de rectas y planos

Ya se vio antes cuándo dos rectas en el plano tienen intersección o no, cuándo son paralelas o perpendiculares. El objetivo del siguiente problema es repasar esos conceptos pero cuando las rectas se presentan en forma vectorial. También se estudia cuándo dos planos en el espacio se intersecan y, si lo hacen, cuál es su intersección. Por último, qué resulta de la intersección entre un plano y una recta en el espacio.

Problema modelo

1. Sean $L_1 : (x, y, z) = (-1, 3, 1) + \alpha(4, 1, 0)$ y $L_2 : (x, y, z) = (-1, 2, 1) + \beta(12, 6, 3)$ dos rectas en el espacio. ¿Se intersecan? Si lo hacen, ¿en qué punto? Un soporte gráfico puede servir de guía.

2. Sean las siguientes tres rectas definidas en el espacio $L_1 : (x, y, z) = \alpha(3, 2, 1) + (-1, -2, 1)$, $L_2 : (x, y, z) = \beta(6, 4, 2) + (1, 3, -2)$ y $L_3 : (x, y, z) = \gamma(-1, 0, 3) + (0, 2, -1)$. Se pide:
   a) Decidir si L_1 es paralela a L_2.
   b) Dar un argumento de por qué L_1 tiene que ser perpendicular a L_3.
3. Describir de manera algorítmica, en pasos ordenados, cómo se puede encontrar una recta escrita en forma vectorial, de manera que sea perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(1, 1, 0)$ y $(1, -2, 2)$ y que pase por el punto $(1, 1, 2)$.
4. Hallar el plano Π que contenga a la recta $L : (1, 2, 1) + \alpha(0, 2, 3)$ y el punto $P = (0, 0, -1)$.
5. Encontrar el plano Π_1 que es perpendicular a $L_1 : (x, y, z) = (1, 2, 1) + \alpha(0, 2, 3)$ y que contiene a $P = (1, 1, 1)$. ¿Y si el plano es paralelo a L_1 y pasa por P?
6. Calcular el punto de intersección entre la recta $L : (x, y, z) = (1, 2, 1) + \alpha(0, 2, 3)$ y $\Pi : x - 2y + 3z = 1$.

Los estudiantes, reunidos en grupos, resuelven los puntos 1 y 2, con los que se estudian las distintas posiciones relativas a dos rectas en el espacio.

Para el punto 1, pueden dibujar con Geogebra y observar que las rectas no son paralelas ni perpendiculares, y las preguntas que surgen son: ¿entonces se cruzan en un punto? ¿Qué pasa con las posiciones relativas de dos rectas en $\mathbb{R}^2$? ¿Sucede lo mismo con $\mathbb{R}^3$?

Mediante la exploración se observa que dos rectas en $\mathbb{R}^3$ pueden cruzarse o no, a pesar de que no sean paralelas. Estas son algunas preguntas para trabajar en la puesta en común:

- ¿Cuál es la dirección de la recta L_1? ¿Por dónde pasa dicha recta?
- ¿Cuál es la dirección de la recta L_2? ¿Por dónde pasa dicha recta?
- ¿Dichas rectas son paralelas? ¿Cómo se puede decidir si las rectas son paralelas?
- ¿Dichas rectas son perpendiculares? ¿Cómo se puede decidir si las rectas son perpendiculares?
- ¿Qué tiene que ocurrir para que dichas rectas se crucen?

Luego, discutir entre todos el punto 2, que trabaja con la noción de rectas paralelas y rectas perpendiculares escritas en manera vectorial. Se puede usar Geogebra para realizar las construcciones y observar las posiciones de las rectas L_1, L_2 y L_3. Luego, se institucionaliza lo siguiente:

Proposición 7.5.1. *Sean $L_1 : (x, y, z) = \alpha v + P$ y $L_2 : (x, y, z) = \beta w + Q$ dos rectas en el espacio.*

- *L_1 es paralela a L_2 si y solo si v es paralelo a w.*
- *L_1 es perpendicular a L_2 si y solo si v es perpendicular a w.*

A continuación, se puede preguntar: si dos rectas en $\mathbb{R}^3$ no son ni paralelas ni perpendiculares, ¿necesariamente se cruzan en un punto?

Después resuelven el punto 3. Si algún grupo tiene dificultades con el enunciado, una estrategia metodológica es guiarlos con las siguientes preguntas y actividades:

- ¿Cómo se puede escribir la ecuación que describe la recta L que pasa por los puntos $(1, 1, 0)$ y $(1, -2, 2)$?
- ¿Qué deben cumplir las rectas que sean perpendiculares a L? ¿Cómo debe ser sus vectores directores?
- Escribir la recta perpendicular a L que pase por el punto $(1, 1, 2)$.
- Antes de resolver el ejercicio, dar una serie de pasos que permitan hacer la construcción.

Luego se puede resolver los puntos 4, 5 y 6. Una posible dificultad para resolver el punto 4 es que no logren encontrar el plano Π o no sepan cómo encontrarlo. Orientarlos preguntando ¿qué elementos se necesitan para calcular dicho plano? y, seguidamente, trabajar con todas las respuestas.

Respecto del punto 5, algunas preguntas para introducir la discusión:

- ¿Cuándo un plano y una recta son paralelos? Hacer gráficos para explorar las distintas posiciones.
- ¿Cuándo un plano y una recta se cruzan?
- ¿Cuándo un plano y una recta son perpendiculares?

Presentar entonces la siguiente propiedad:

Proposición 7.5.2. *Sea Π un plano con normal N y una recta $L : (x, y, z) = \alpha v + P$.*

- *Π es paralelo a L si y solo si N es perpendicular a v, vector director de L.*
- *Π es perpendicular a L si y solo si N es paralelo a v.*

Se puede dejar de tarea el punto 6 y retomarlo la clase siguiente.

Nota: Los ejercicios 7.5.7, 7.5.8 y 7.6.6 del Libro para el estudiante abordan estos temas.

Tercera parte

Anexos

ANEXO

A

Programa de la materia y organización de las clases

El programa de la materia Álgebra y Geometría Analítica para las Ingenierías Metalúrgica y en Energía Eléctrica, y la Tecnicatura en Electricidad, que se dictan en la Universidad Nacional de Hurlingham, fue aprobado por el Consejo Superior de la Universidad.

Instituto de Tecnología e ingeniería

Campo de formación en ingeniería (CFBI)

Asignatura: Álgebra y Geometría Analítica

Régimen: Cuatrimestral

Cantidad de horas cátedra: 6 horas

Fundamentación

La asignatura Álgebra y Geometría Analítica se dicta en el primer año de las carreras de Ingeniería Metalúrgica e Ingeniería en Energía Eléctrica. Está enmarcada en el campo de formación básica en ingeniería (CFBI) y es la segunda materia de matemática que cursan los y las estudiantes después de Análisis Matemático I. Al igual que esta, es cuatrimestral, tiene una carga de 6 horas cátedra semanales, con un total de 96 horas. Su objetivo es proporcionar ciertas herramientas del Álgebra Lineal y de la Geometría en Coordenadas necesarias para el desarrollo profesional de los futuros ingenieros.

Fundamentación de la materia dentro del plan de estudios

La ciencia evoluciona de manera constante, la dinámica actual debe ser considerada permanentemente para tener la capacidad de aportar contribuciones. Por eso la enseñanza de las ciencias básicas, como la Matemática, debe tender a la formación de procesos de pensamiento propios de la disciplina, más que a la trasmisión de contenidos estáticos y acabados. La Matemática es una ciencia en la que el método predomina sobre el contenido; por eso, es necesario conceder una gran importancia al estudio de las cuestiones que se refieren, principalmente, a los procesos mentales de resolución de problemas, utilizando las herramientas aprendidas.

Hace tan solo 40 años, el estudio del Álgebra Lineal estaba volcado a los estudiantes de las carreras de Matemática y Física, y a aquellos que necesitaban conocimientos, en especial, de la teoría de matrices. Pero actualmente, es sabido que el Álgebra Lineal y la Geometría en Coordenadas se estudian en muchas disciplinas, debido, en especial, al uso de las computadoras y del álgebra computacional.

Los estudiantes en esta asignatura en las carreras de Ingeniería Metalúrgica y Eléctrica aprenden nociones básicas del Álgebra Lineal y de la Geometría en Coordenadas. Los estudiantes ya adquirieron herramientas básicas del Análisis Matemático, como el cálculo infinitesimal y diferencial. Cabe mencionar que estas nociones les permitirán complementar lo ya visto en Introducción al Análisis Matemático, desde el punto de vista de los contenidos específicos, como así también en el aprendizaje de herramientas de razonamiento lógico y de estudio. Además, los contenidos de esta materia ayudarán a los futuros ingenieros e ingenieras en el aprendizaje de las siguientes asignaturas: Análisis Matemático I, II, Física I, II y III, y Probabilidad y Estadística. En esta materia se dan ejemplos del uso del Álgebra Lineal en otras disciplinas no tan técnicas y del uso de la computadora como herramienta para la resolución de problemas, observando también la complejidad computacional, por ejemplo, en la multiplicación de matrices.

Dentro de las materias básicas en la carrera del futuro ingeniero, esta permite desarrollar la capacidad de pensamiento lógico y riguroso, ya que otorga las herramientas necesarias para plantear un modelo matemático que describa de manera exacta, o con adecuada aproximación y razonable simplicidad, un problema del mundo real y su solución. Cabe mencionar que, para iniciarse en el estudio de esta asignatura, se requiere que el estudiante maneje conceptos del Análisis Matemático, por eso, cuando sea necesario, se refrescarán esos conceptos.

El Álgebra Lineal permite combinar la abstracción con la visualización de los conceptos en forma gráfica y su aplicación. Permite también utilizar ciertos fundamentos teóricos y desarrollar así la habilidad de razonar matemáticamente y transferir esos conocimientos y habilidades en diversas aplicaciones con creatividad. En las aplicaciones del Álgebra Lineal y de la Geometría Analítica, el influjo de las computadoras de alta velocidad ha sido inmenso, sobre todo por su capacidad numérica para resolver problemas sumamente complicados, su capacidad de cálculo rápido, de comprensión del tiempo, de modelización fiel y de representación gráfica, marcando tanto en la matemática como en el resto de las ciencias el comienzo de una nueva etapa. Por eso, se hace imprescindible incluir *software* para agilizar las clases y enfocarse en el saber hacer matemática. Por la importancia del estudio del Álgebra Lineal en las carreras de Ingeniería y la necesidad de emplear herramientas computacionales adecuadas y actualizadas que aporten a la formación integral de los futuros ingenieros, se recurrirá al uso de Matlab o Maple o sus equivalentes de código abierto, por ejemplo Octave, Sage. Estos paquetes son poderosos, flexibles, amigables e interactivos para la resolución de problemas que requieren cálculos numéricos con matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales y, además, permiten una excelente visualización gráfica en dos y tres dimensiones, por ejemplo, para el estudio de las cónicas y cuádricas.

Se utiliza también un aula virtual como recurso didáctico que funciona como un complemento para el desarrollo de la asignatura, ya que da acceso rápido y sencillo a información relevante para los estudiantes, además de favorecer la comunicación entre docentes y estudiantes, de manera grupal o individual, y también entre estudiantes.

Fundamentos del programa

El programa está diseñado con el objetivo de formar a los futuros ingenieros e ingenieras para que realicen su labor, teniendo en cuenta las incumbencias profesionales antes señaladas. La propuesta de enseñanza se enmarca en la convicción de que en la enseñanza matemática es imprescindible destacar el rol de la resolución de problemas como elemento necesario para el origen y desarrollo del trabajo de un ingeniero. Antes de describir esta propuesta, vale mencionar algunas características negativas generales de la educación en las escuelas y en los primeros cursos de matemática universitaria. Esta propuesta quiere resolver de alguna manera estos aspectos.

La primera observación es que buena parte de la sociedad tiene la convicción de que la matemática que se enseña en la escuela no sirve. Esa convicción proviene del hecho de que la matemática escolar se fue desvinculando de la realidad, pues se presenta de una manera deductivo-axiomática, tanto en los institutos terciarios como en la universidad. Esta propuesta se basa en concebir la matemática como una herramienta para resolver problemas concretos que se presentan en el trabajo cotidiano de un ingeniero en una industria o empresa. Otra observación es que los temas se presentan en la forma de producto final, partiendo de conceptos poco intuitivos y poco motivados que trasmiten una idea lineal de la actividad matemática. El esquema clásico, aplicado a lo alargo de los años, es el siguiente: definición-teorema-demostración-ejemplos-aplicación. Esto da a los estudiantes la impresión de que la matemática es estática, que no hay nada nuevo para hacer y que el único papel que ellos pueden jugar es el de espectadores que tratan de entender. Sin embargo, sería un error caer en el extremo contrario: hacer hincapié en las aplicaciones a expensas del contenido.

A fin de evitar ambos errores, en esta propuesta se trata de invertir, en la medida de lo posible, la típica secuencia definición-teorema-demostración-ejemplo-aplicación. Para ello, se parte de un problema (la aplicación) que permite poner el tema por estudiar en una perspectiva concreta, a la vez que ofrece a los estudiantes una idea intuitiva para seguir los desarrollos posteriores. Para los cursos de Álgebra Lineal, los textos de Grossman y el de Lay, por ejemplo, son una excelente muestra de cursos de la disciplina basados en las aplicaciones y que promueven la experimentación numérica, además de trabajar con los contenidos matemáticos. En tal sentido, se eligió enfatizar el punto de vista de la matemática constructiva, computacional y con aplicaciones, con el propósito de mostrar una matemática a la vez comprensible y útil.

Las ingenierías, indudablemente, tienen una fuerte vinculación con la matemática y la informática, que aprovecha aquí para agregar al programa el estudio de algunos problemas que se pueden trabajar de un modo computacional, por ejemplo, algunos modelos simples, como las matrices de insumo–producto o la red de tránsito como ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales. Varios de esos ejemplos tienen la particularidad de que permiten observar cómo un modelo matemático puede explicar la realidad e influir en la toma de decisiones que afectan la vida cotidiana. A pesar de la relevancia de las aplicaciones, es importante que la mayor parte del tiempo de la materia se ocupe en el desarrollo del contenido matemático; por ello, la modelización de los problemas elegidos es simple y no demanda conocimientos muy profundos de la disciplina en cuestión.

Características generales del programa propuesto

El programa se divide en tres ejes temáticos.

El primer eje está referido a temas fundamentales de las estructuras algebraicas, como la noción de cuerpo y, en especial, la del cuerpo de los números complejos.

El segundo eje está referido a temas fundamentales del Álgebra Lineal, como vectores y matrices, sistemas de ecuaciones lineales, métodos de solución, noción de cuadrados mínimos en el estudio de los sistemas lineales, espacios vectoriales, transformaciones lineales, base, dimensión, autovalores y autovectores, y la computación numérica y simbólica aplicada al álgebra.

El tercer eje está referido a temas fundamentales de Geometría Analítica en el plano y el espacio, por ejemplo, rectas y planos, cónicas y cuádricas, ecuaciones de segundo grado en dos o tres variables; computación, numérica y simbólica.

Objetivos generales y específicos

El objetivo principal es recorrer una serie de técnicas y conceptos básicos del Álgebra Lineal y de la Geometría Analítica, partiendo de problemas concretos y tratando de manera integrada aspectos lógicos, abstractos, gráficos y numéricos.

Objetivos generales de la materia

- Formar al estudiante en el Álgebra Lineal básica que es utilizada en variadas aplicaciones de la ingeniería.
- Usar paquetes computacionales especializados, como Matlab y Maple, o sus equivalentes libres, que permitan realizar las operaciones involucradas.
- Lograr que los temas que se presentan estén motivados con ejemplos concretos, excluyendo toda presentación meramente axiomática.
- Ayudar al estudiante a tomar conciencia de la importancia de los contenidos de la asignatura como herramienta básica de su formación.
- Promover que el estudiante participe activamente en su propio proceso de aprendizaje, para lo cual es necesario promover espacios de debate, de construcción del conocimiento, de realización de ejercicios que motiven el aprendizaje de un contenido específico.
- Promover la capacidad de plantear problemas, de interpretarlos y de resolverlos, identificando en cada uno qué herramientas se necesitan para llegar con éxito a la solución.

- Generar en el estudiante el hábito de estudio y de trabajo organizado, de la consulta del material bibliográfico y del aprovechamiento de aula virtual de la materia.
- Desarrollar capacidades de abstracción y generalización que le permitan al estudiante, en un futuro, encarar y resolver problemas.
- Lograr que el estudiante se apropie de los conceptos matemáticos de esta asignatura pensando que serán las herramientas de su futuro trabajo profesional.
- Lograr que el estudiante proponga maneras correctas de argumentar y de justificar sus decisiones.

Objetivos del docente

- Motivar el pensamiento reflexivo por medio del planteo y resolución de problemas, y de la creatividad.
- Desarrollar las clases de una manera comprometida con el grupo, permitiendo momentos de consulta, corrección de ejercicios, revisión de los temas que sea necesario reforzar, profundización de los conceptos necesarios para la formación profesional, personal y mental de los estudiantes.
- Permitir a los alumnos tener una experiencia de continuidad y evolución de su aprendizaje y no dar todo rápidamente por la idea de no llegar con los temas.
- Trabajar para que los estudiantes se sientan seguros de su capacidad de construir conocimientos matemáticos, desarrollen su autoestima y sean perseverantes en la búsqueda de soluciones.
- Proyectar y llevar adelante una enseñanza que permita a los estudiantes construir el sentido de los conocimientos matemáticos, y que sean capaces tanto de utilizarlos para resolver problemas y lograr demostraciones de teoremas por sí solos, como de identificarlos y relacionarlos en términos matemáticos.
- Favorecer en el aula la identificación y formulación tanto de los conocimientos válidos como de los erróneos, asumiendo que es fecundo trabajar no solo sobre los aciertos sino también sobre los errores.
- Promover la idea de que no hay aprendizaje si no es a través del estudio, es decir, sin un trabajo personal del estudiante; para ello es necesario fomentar el uso de apuntes y libros, de actividades de evocación, de actividades de repaso de los temas vistos y de puestas en común y debates.

Objetivos específicos de la materia

Lograr que el estudiante:

- Conozca las diversas herramientas que ofrece el Álgebra Lineal y la Geometría Analítica.
- Reconozca propiedades de rectas en el plano y métodos de soluciones de ecuaciones algebraicas en dos variables.
- Represente elementos de manera bidimensional y tridimensional.
- Resuelva situaciones que involucren los diferentes significados de las operaciones matriciales.
- Reconozca y aplique propiedades a través de sistemas de ecuaciones lineales.
- Pueda diferenciar y representar las distintas cónicas y cuádricas, y sus movimientos.
- Observe la importancia que tiene el método de reducción gaussiana para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Se familiarice con un programa como Matlab y Maple, o sus equivalentes, a fin de resolver problemas relacionados con sistemas de ecuaciones y ver las características de las soluciones de los sistemas.
- Se familiarice con los vectores y matrices, así como sus operaciones y la estructura que tiene estos objetos.
- Conozca la relación entre matrices y vectores con sistemas de ecuaciones, así como el concepto de soluciones de sistemas de ecuaciones homogéneos y no homogéneos.
- Estudiar el concepto de inversa de una matriz y su relación con la solución de sistemas de ecuaciones.
- Estudie la factorización de matrices en términos de dos matrices triangulares con características especiales.
- Se familiarice con los conceptos básicos de diagonalización de matrices: autovalores y autovectores, en vista de la comprensión de sus diversas aplicaciones.
- Estudie aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales, como las gráficas dirigidas.
- Estudie la definición inductiva de los determinantes y sus aplicaciones a matrices particulares.
- Relacione el determinante de una matriz con la existencia de su inversa.

- Se familiarice con las descripciones y propiedades de las rectas y planos en el espacio, haciendo uso de las herramientas vistas.

Contenidos

Contenidos analíticos

Parte 1: Nociones de Álgebra

Unidad 1: Números complejos

Definición de número complejo. Forma binómica de un número complejo. Operaciones: suma, multiplicación, producto por escalar en los números complejos. Propiedades de las operaciones. Potencias de la unidad imaginaria. Complejos conjugados: definición y propiedades. División con números complejos. Módulo de un número complejo. Representación de un número complejo. Forma polar y trigonométrica de un número complejo. Potenciación y radicación en los números complejos. Fórmulas de De Moivre.

Parte 2: Nociones del Álgebra Lineal

Unidad 2: Sistemas de ecuaciones lineales

Ecuaciones lineales. Dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Sistemas de ecuaciones lineales generales. Solución de sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas de ecuaciones equivalentes. Operaciones elementales. Métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales: Eliminación de Gauss-Jordan. Eliminación gaussiana. Clasificación de sistemas lineales por su tipo de solución. Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos. Aplicaciones.

Unidad 3: Matrices y sus operaciones

Definiciones generales. Vector fila y columna. Operaciones con vectores: suma, multiplicación por escalar y multiplicación vectorial. Definición de matriz. Operaciones con matrices: suma, escalar por matriz, producto de matrices. Propiedades: álgebra de matrices. Transpuesta de una matriz. Tipos de matrices: matrices elementales, matriz identidad, matriz nula, matrices simétricas y de permutación. Inversa de una matriz cuadrada. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales. Rango de una matriz. Teorema de Rouché-Frobenius. Aplicaciones.

Unidad 4: Determinantes

Definición. Determinantes de orden n. Interpretación geométrica del determinante de una matriz de dos por dos. Propiedades de los determinantes. Matriz adjunta. Determinantes e inversas. Regla de Cramer. Existencia de la solución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas vía el determinante. Aplicaciones.

Unidad 5: Espacios vectoriales

Ejemplos de espacios vectoriales. Definición y propiedades. Subespacios. Operaciones entre subespacios. Combinación lineal, independencia lineal, base y dimensión de un espacio vectorial. Extensión de una base a partir de un conjunto linealmente independiente y extracción de una base a partir de un conjunto de generadores de un espacio vectorial. Matrices, sistemas de ecuaciones lineales y espacios vectoriales. Espacio fila y espacio columna. Rango de una matriz.

Unidad 6: Transformaciones lineales

Definición y ejemplos. Propiedades de la trasformación lineal. Imagen y núcleo. Representación matricial de una transformación lineal. Matriz asociada a una transformación lineal. Matriz asociada. Isomorfismos e isometrías. Matriz cambio de base. Autovalores y autovectores. Polinomio característico.

Parte 3: Nociones de Geometría Analítica

Unidad 7: Vectores en el plano y en el espacio

Vectores en el plano: operaciones: suma, resta entre vectores y producto de un escalar por un vector. Vector en un sistema de coordenadas y definidas por las coordenadas de su origen y extremo. Módulo. Ángulos directores. Versor asociado a un vector. Producto vectorial y mixto. Definición. Interpretación geométrica. Cálculo por coordenadas. Proyección ortogonal de un vector sobre otro. Ángulo entre vectores. Problemas.

Rectas en el plano: ecuaciones de la recta que pasa por un punto y es paralela a un vector, ecuaciones de una recta que pasa por un punto y es perpendicular a un vector. Posiciones relativas de dos rectas en el plano. Ecuaciones de la recta que pasa por dos puntos. Distancia de punto a una recta en el plano. Intersección entre dos rectas. Aplicaciones.

Planos en el espacio: Ecuación implícita del plano. Ecuación del plano que pasa por tres puntos no alineados. Ecuación del plano que pasa por un punto y es paralelo a dos vectores no paralelos entre sí. Ecuaciones paramétricas, vectorial y cartesiana del plano. Posiciones relativas de dos planos. Distancia de punto a un plano.

Rectas en el plano: ecuación de la recta en el espacio que pasa por un punto y es paralela a un vector. Recta definida por la intersección de dos planos no paralelos. Posiciones relativas de rectas y planos. Distancia de punto a recta en el espacio. Posiciones relativas de dos rectas en el espacio.

Unidad 8: Cónicas y cuádricas

Origen del nombre. Las tres cónicas: elipse, hipérbola y parábola. Definición de cada cónica a partir de una recta (directriz) y un punto fijo (foco) no perteneciente a ella. Excentricidad. Ecuación canónica correspondiente a cada cónica. Gráficos. Definición clásica de las cónicas. Equivalencia de ambas definiciones. Ecuación de segundo grado incompleta en dos variables. Propiedades. Superficies y curvas en el espacio en coordenadas cartesianas. Análisis de la ecuación de una superficie. Superficies cilíndricas, cónicas, de revolución, regladas. Esfera. Las cinco cuádricas. Definición, ecuación canónica y gráfico. Primeras propiedades.

Uso de *software*: computación gráfica, numérica y simbólica aplicada al álgebra y a la geometría, como Octave y Geogebra.

Bibliografía

Bibliografía básica

1. Grossman, Stanley, *Álgebra Lineal y aplicaciones*, McGraW-Hill, 1996.
2. Kindel, J., *Geometría Analítica*, Serie Shaum, 1996.
3. Kolman, Bernard y David Hill, emphAlgebra Lineal, Pearson Education, 2006.
4. Lay, David. *Álgebra Lineal y aplicaciones*, Pearson Addison Wesley, 2007.
5. Strang, G. *Álgebra Lineal y sus aplicaciones*, Fondo Educativo Interamericano S.A.,1982.

Bibliografía complementaria

1. Kolman, Bernard, *Álgebra Lineal con aplicaciones y Matlab*. Prentice Hall-Pearson, 1999.

2. Grossman, S. *Aplicaciones de Álgebra Lineal*, Grupo Editorial Iberoamérica, 1993.
3. Hanselman, D. *The Math Works*, INC Matlab, versión 6, Guía del Usuario, 2000.
4. Heinhold, J y Riedmüller, B. *Álgebra Lineal y Geometría Analítica*, Editorial Reverté, tomo I, 1980.
5. Hoffman-Kunze. *Álgebra Lineal*, Prentice Hall, 1982.
6. Larson, R y B. Edwars, *Introducción al Álgebra Lineal*, Limusa Noriega Editores, 1995.
7. Lehmann, C., *Geometría Analítica*, Limusa, 1986.
8. Lipschutz, S., *Álgebra Lineal*, McGraw Hill, 1991.
9. Nakamuram S., *Análisis numérico y visualización gráfica con MATLAB*, Prentice Hall Hispanoamericana, 1997.
10. Riddle, D., *Geometría Analítica*, PWS Publishing Company, 1995.
11. Rojo, A., *Álgebra I*, El Ateneo, 2001.
12. Villamayor, O., *Álgebra Lineal*, Monografía número 5, Serie de Matemática, OEA, 1976.

Articulación horizontal y vertical

La materia Álgebra y Geometría Analítica articula, primero, nociones del Álgebra Lineal con la Geometría Analítica, horizontalmente con Introducción al Análisis Matemático y Análisis Matemático I, a través del concepto de secciones cónicas y superficies, y representación de rectas y planos en el espacio. Estos contenidos también servirán para las asignaturas que se encuentran dentro del campo de formación básica y específica.

Metodología

Metodología de la enseñanza

El verdadero aprendizaje, en oposición a la mera repetición de rituales, se construye en un proceso en el cual la experiencia práctica y la adquisición de conocimientos teóricos se retroalimentan. En este sentido, en las clases teóricas se partirá, siempre que sea posible, de problemas concretos y se proporcionará un tiempo significativo a la resolución de ejercicios. Asimismo, se incluirán breves reseñas históricas de cada tema, en la medida en que ilustren la manera dinámica en que fue construido el concepto correspondiente. En las clases prácticas se intentará abstraer los aspectos teóricos subyacentes a los problemas en consideración. A su vez, se fomentará entre los estudiantes el uso sistemático de *software* de cálculo simbólico y numérico (Maple, Matlab o sus equivalentes, Geogebra y Octave).

Desarrollo de la asignatura

El desarrollo de los contenidos de la materia está dividido en clases teóricas y prácticas, y esto se respetará en lo posible. No obstante, los conceptos se introducirán de una manera constructiva, por ello se trabajará también en las clases teóricas con supuestos prácticos que motiven e ilustren dichos conceptos. También, en algunas clases prácticas se darán nociones que sirvan para ampliar los conocimientos adquiridos y para relacionarlos con otras disciplinas matemáticas. Es decir, los conceptos teóricos y prácticos estarán fuertemente relacionados, lo que involucrará la actitud dinámica y crítica de los estudiantes y la conducción necesaria del docente para lograr la adquisición de los conocimientos. La participación de los estudiantes será necesaria, ya que se espera que ellos mismos, a través de los problemas que se dan en las clases, construyan el conocimiento, el sentido de los objetos estudiados en el curso.

Para lograr la construcción del aprendizaje se trabajará de la siguiente manera:

- identificar problemas,
- analizar alternativas,
- proyectar soluciones, cada vez con mayor ajuste, profundidad y detalle.

Se realizarán también trabajos prácticos individuales y grupales. En estos trabajos habrá problemas que se resolverán en las clases, se expondrán y discutirán las diferentes soluciones; se trabajará con el error, es decir, se sacarán conclusiones, se confrontarán procedimientos, se opinará acerca de la validez de una conjetura. Es por ello que la actividad del docente será indisensable para organizar y generar los debates y las puestas en común. Al finalizarlos, debe hacerse una formalización que permita sacar del contexto de problema los conceptos que puso en juego. También habrá ejercitación para ampliar y fijar los contenidos dados.

La función del docente deberá ser, sobre todo, orientadora y promotora. En las clases de consulta los estudiantes podrán no solo consultar sus dudas sino observar la evolución de su aprendizaje. También podrán consultar sobre algún tema teórico en el que tengan dificultad.

En algunas clases se usará la computadora como un recurso didáctico para resolver y analizar problemas matemáticos. Este trabajo se hará en grupos reducidos, para poder emplear el método de trabajos dirigidos, fomentando la motivación del alumno y acrecentando la personalización de la enseñanza.

El uso de *software* permite liberar al docente y estudiante de tediosos cálculos, centrando la enseñanza en aspectos conceptuales, como interpretar modelos matemáticos y sobre todo aplicar herramientas de esta ciencia a los distintos problemas de ingeniería.

También se implementarán actividades para que el alumno emplee la computadora como medio, ya que va a aprender con ella a deducir, generalizar y hasta verbalizar los logros. Estas herramientas computacionales para resolver situaciones problemáticas posibilita al estudiante transitar el camino de la búsqueda y el hallazgo o no de soluciones, desarrollar su capacidad creativa mediante la elaboración de programas sencillos que enriquecen la tarea, y pueden valorar la rapidez de cálculo numérico y el potencial gráfico del que disponen. Las clases y prácticas con las computadoras tienen como objetivo motivar e incentivar el aprendizaje con la herramienta computacional y a optimizar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Dinámica de las clases. Recursos didácticos

El curso se desarrollará mediante clases teóricas y trabajos prácticos, con interrelación de unas con otros. Este modo de trabajar apunta a la participación activa de los estudiantes. Las clases se desarrollarán mediante la exposición de contenidos a través de un problema modelo para resolver, con diálogos que introduzcan a los estudiantes en la formalidad de los temas desde un punto de vista matemático, y que, a la vez, pongan de manifiesto las aplicaciones específicas en el área del análisis. Contenidos que complementen, sinteticen y expliciten el material bibliográfico previsto, adjuntando ejercicios y problemas sobre la base de guías confeccionadas para tal fin.

Cada clase se organizará de la siguiente manera: en la primera parte, en general, se trabajará con el concepto que se estudiará, utilizando problemas que permitan introducirlo, definiendo los conceptos necesarios y sus propiedades. También se realizarán demostraciones de algunas propiedades como modo de acercarse más al concepto y a la manera que se piensa en matemática. Para que el conocimiento de los contenidos sea significativo para los y las estudiantes, se darán problemas (que se trabajarán en pequeños grupos) que deberán resolver utilizando diferentes procedimientos. Este trabajo será debatido en la clase, lo que permitirá que los estudaintes encuentren una manera adecuada para comunicar esos procedimientos. Luego habrá una confrontación de las soluciones y se hará una sistematización que permitirá identificar el concepto para poder usarlo en otras ocasiones.

En la segunda parte se trabajará con ejercicios que permitan aplicar los conocimientos aprendidos y que integren los fundamentos teóricos con aplicaciones prácticas. El método expositivo será empleado por el docente para presentar la unidad de aprendizaje, indicar modos de trabajos más recomendables, esclarecer estructuras conceptuales complejas, integrar conceptos discutidos por la clase, enriquecer con informaciones de distintas fuentes e intensificar la motivación de los estudiantes por aprender conceptos nuevos y técnicas.

Entre el tipo de actividades que están pensadas para desarrollarse en esta asignatura se encuentran:

1. Resolución de guías de problemas y ejercicios en cada unidad.
2. Trabajos de investigación.
3. Búsqueda de información en diferentes soportes.
4. Búsqueda y selección de información en internet.
5. Discusión y debate grupal.
6. Discusión y análisis de errores.
7. Puesta en común y autocorrección de ejercicios.
8. Corrección y ejercitación en el pizarrón.

Las prácticas se desarrollarán de manera tal que el docente tenga oportunidad de realizar una evaluación continua de cada estudiante.

Entre los recursos didácticos disponibles se encuentran: fibrones, pizarrón, proyector, transparencias, *software*, gráficos, resúmenes, guías prácticas, calculadoras gráficas, guías de trabajos para el uso de las computadoras y diversos textos. Se incentiva al estudiante a recurrir al uso de la bibliografía referida y a la búsqueda de información relevante en páginas de internet junto con el uso del aula virtual.

Trabajos prácticos

Los problemas constituyen una parte crucial del aprendizaje de la matemática. No se puede aprender conceptos matemáticos solo estudiando las definiciones, teoremas y ejemplos dados en las clases.

Por ello se dará mucha importancia a la resolución, análisis, confrontación de las distintas resoluciones y se deberá también dedicar mucho tiempo de trabajo personal fuera de las clases para el desarrollo y resolución de los ejercicios.

La dificultad de los ejercicios varía, siendo los primeros más fáciles y mecánicos, diseñados para poner a prueba si se ha comprendido las definiciones y ejemplos hasta los que requieren un mayor poder de interpretación y abstracción. Se trabajará con guías de trabajos prácticos que se realizarán en la segunda parte de cada clase. Las actividades van desde aquellas que apuntan a la conceptualización y la comprensión crítica de teorías o problemas hasta los ejercicios con los que se trata que los alumnos reflexionen y apliquen lo aprendido. Se trabajará en grupos resolviendo los ejercicios y problemas planteados por el docente y se destinarán momentos para la consulta de los ejercicios de las guías.

La mayoría de los ejercicios propuestos en los trabajos prácticos se hará en momentos fuera de la clase y se destinarán momentos en las clases para la corrección y momentos de consulta en otros horarios.

Es necesario resaltar que los enunciados de los problemas deben ser claros y sin ambigüedades. Además, al finalizar cada unidad temática se hará un repaso que englobará los temas dados mediante la realización de una guía de ejercicios teóricos y prácticos. También se realizará un trabajo práctico con problemas que se resuelven con la computadora.

Integración de TIC en la propuesta pedagógica

La enseñanza de esta asignatura implica el uso de *software* libre, como Octave y Geogebra, o de Maple o Matlab, para contribuir en el proceso de enseñanza - aprendizaje. Se utilizarán estas herramientas para resolver problemas más cercanos al mundo real que, por su complejidad, son tediosos o extensos de resolver manualmente, por ejemplo, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con muchas incógnitas y el cálculo de determinantes. También se usarán para la visualización y análisis de gráficos de cuádricas y cónicas o de rectas y planos. Se incluirán trabajos prácticos con uso de estas herramientas en los que se resuelven problemas y preguntas de reflexión sobre esas soluciones. Estos trabajos prácticos tienen una nota y forman parte de la aprobación de la asignatura.

Uso del campus virtual

En la UNAHUR, todas las materias y comisiones cuentan con un aula en el campus virtual. Allí los estudiantes encuentran:

- El material teórico y los trabajos prácticos en formato PDF descargable.
- Enlaces a la bibliografía recomendada.

- El calendario de la materia: fechas parciales, entrega de trabajos prácticos, cronograma de la materia, entre otros datos.
- Novedades e información para la cursada.
- Un foro social donde los estudiantes dialogan entre ellos.
- Un foro de consulta académica con docentes.
- Autoevaluaciones con ejercicios complementarios.
- Enlaces a sitios de interés.

El aula virtual de Álgebra está organizada para que los estudiantes organicen su estudio según sus propios tiempos, seleccionando las actividades de los temas en los que tengan más dificultad o que quieran repasar.

Evaluación

Criterios de evaluación

El sistema normal de evaluación consistirá en exámenes parciales con recuperatorios, según el cronograma previsto, que abrcan la totalidad de la materia. Las fechas de esos parciales se establecerán en el cronograma correspondiente.

Además, se evaluarán los trabajos prácticos integradores usando la computadora.

Todas esas evaluaciones, más las valoraciones de las actividades realizadas por los estudiantes en las clases, constituyen la evaluación permanente de cada uno por parte del docente de la cátedra.

Cabe aclarar en este punto que, además de los parciales y sus recuperatorios, se evaluará la evolución de cada estudiante en las distintas prácticas, desde el trabajo realizado con un compañero o compañera, en las maneras de argumentación, de validación de sus respuestas y de su compromiso con el saber. Se observará si los alumnos pueden reutilizar los conocimientos aprendidos; para ello se pedirá que resuelvan determinados ejercicios en algunos momentos de las clases y al finalizar cada unidad habrá un repaso general de todos los conceptos.

La evaluación será permanente y continua, e incluirá aspectos actitudinales, procedimentales y conceptuales, el trabajo en clase y la participación activa.

Se tendrán en cuenta los siguientes aspectos:

- El orden y claridad en las exposiciones, tanto orales como escritas.
- El compromiso con sus producciones y con las producciones de sus compañeros para analizarlas críticamente.

- El cumplimiento en la entrega de los trabajos prácticos pedidos en las fechas estipuladas en la cursada.
- El procedimiento y desarrollo de ejercicios y problemas dados.
- La justificación y análisis de los resultados.
- La clara y correcta expresión de las ideas.
- La interrelación de los conocimientos dados en la materia, integrando con conceptos de otras asignaturas.
- La calidad de los conocimientos adquiridos y la correcta aplicación en diversas situaciones planteadas por el docente.

Formato de evaluación

El sistema de aprobación de la materia se adecuará a lo previsto en el Régimen Académico de la Universidad Nacional de Hurlingham, aprobado por el Consejo Superior.

Se consideran tres notas para la evaluación de la materia:

1. una nota del primer parcial (presencial e individual),
2. una nota del segundo parcial (presencial e individual),
3. un trabajo práctico (grupal, 2 o 3 estudiantes).

La nota de cada parcial y del trabajo práctico se calificará del 1 (uno) a 10 (diez) o Ausente.

1. **Promoción directa (sin examen final):** Se deben reunir, simultáneamente, las siguientes condiciones:
   a) Aprobación de cada examen parcial con una nota mayor o igual que 6 y promedio de las dos notas mayor o igual que 7.
   b) Aprobación del trabajo práctico con una nota mayor o igual que 6.
2. **Regularidad (con final):** Se deben reunir, simultáneamente, las siguientes condiciones:
   a) Aprobación de cada examen parcial con una nota mayor o igual que 4.
   b) Aprobación del trabajo práctico con una nota mayor o igual que 4.
3. **Recuperatorio:** Si en algún parcial el alumno tiene una nota menor o igual que 3, tendrá la oportunidad de recuperar ese parcial al final del cuatrimestre. La nota del recuperatorio anula la nota del parcial. Se califica el parcial con una nota de 1 (uno) al 10 (diez).

Si el estudiante, por enfermedad, no concurre a una de las evaluaciones y presenta el certificado médico correspondiente, tendrá la oportunidad de dar esa evaluación al final del cuatrimestre en la fecha del recuperatorio.

El trabajo práctico se calificará con una nota del 1 (uno) a 10 (diez) y será grupal, con partes teóricas y prácticas. Todos los integrantes del grupo deben participar en el trabajo práctico.

ANEXO

B

Trabajo con cónicas y Geogebra

Este modelo de trabajo práctico final, en el que se estudian las cónicas como lugar geométrico, consta de tres partes. En la primera se pide que, a partir de la lectura de un artículo, los estudiantes respondan determinadas preguntas que orientan la reflexión. En la segunda parte deberán, con ayuda de Geogebra, argumentar y conjeturar propiedades. En la última parte, se realizan ejercicios de aplicación.

Parte 1

Luego de la lectura del texto extraído de *Matemática básica para Ingeniería Agronómica e Ingeniería Forestal de la Universidad Nacional de la Plata*, de las páginas 31 a 36 y de las páginas 41 a 52 (ver González y Caraballo 2013), responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la definición de lugar geométrico? Dar algunos ejemplos extraídos del texto.

b) ¿Cuál es la definición de lugar geométrico de la circunferencia? ¿Cuáles son los elementos de la circunferencia? Dar un ejemplo.

c) ¿Cuál es la definición de elipse como lugar geométrico, escribiendo, explícitamente, la ecuación con las distancias que permite definirlo? ¿Cuáles son sus elementos principales? ¿Qué sucede si $d(F_1, F_2) = 2a$? ¿Qué sucede si $F_1 = F_2$? Explicar con todo detalle los pasos del texto para llegar a la ecuación canónica de la elipse en coordenadas cartesianas con centro en el origen de coordenadas y con cualquier centro.

d) ¿Cuál es la definición de parábola como lugar geométrico? Escribir explícitamente la ecuación de las distancias que permite definirlo. ¿Cuáles son sus elementos principales? Explicar con todo detalle los pasos que describe el texto para llegar a la ecuación canónica de la parábola en coordenadas cartesianas con centro en el origen de coordenadas y con cualquier centro.

Parte 2

Leyendo el manual M. Hohenwarter y J. Hohenwarter (2010), donde se encuentran las herramientas que provee el programa Geogebra, se pide que realicen los siguientes gráficos:

1. Sea $P = (x, y)$ un punto que se mueve de manera tal que su distancia al punto $(-2, 4)$ es siempre 3.
   - Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico dado anteriormente.
   - Graficar y verificar la solución hallada.
   - Encontrar todos los elementos de la cónica anterior.
2. Explorar, en las Opciones de herramientas, la manera de crear:
   - una circunferencia con centro $C = (2, 1)$ y que contiene el punto $A = (3, 4)$. Dar su ecuación de dos formas diferentes;
   - una circunferencia que pasa por los puntos $A = (5, 2)$, $B = (-3, 4)$ y $C = (1, 2)$ Dar su ecuación de dos formas diferentes.
3. Teniendo en cuenta las siguientes sentencias para graficar una elipse, elegir la más conveniente, según los datos, para obtener las ecuaciones de las elipes que se indican y graficarla. Explicar el por qué de la sentencia elegida y si es posible elegir otra sentencia para realizar la gráfica pedida.
   a) Cónica[Punto A, Punto B, Punto C, Punto D, Punto E]: Produce la sección cónica que pasa los cinco puntos dados A, B, C, D y E.
   b) Elipse[Punto F, Punto G, Número a]: Crea la elipse con puntos focales F y G y eje principal de longitud a. Atención: Condición $2a >$ Distancia$[F, G]$.
   c) Elipse[Punto F, Punto G, Segmento]: Crea la elipse con puntos focales F y G siendo la longitud del eje principal igual a la del segmento dado, para ello debe primero ingresar los puntos extremos del segmento y crear el segmento.
   d) Elipse[Punto A, Punto B, Punto C]: Crea una elipse con puntos focales A y B que pasa a través del punto C.
   - Con centro $C = (0, 0)$, un foco $(2, 0)$ y un vértice $(3, 0)$.
   - Focos $(0, 5)$ y $(0, -5)$ y eje mayor de longitud 14.
   - Focos $(2, 3)$ y $(6, 3)$ y excentricidad $2/3$.
   - Focos $(3, 0)$ y $(-3, 0)$ y un punto que pertenece a la elipse $(6, 4)$.

4. Utilizando las siguientes sentencias, representar las siguientes hipérbolas. Explicitar los pasos.

   a) Herramienta Hipérbola.

   b) Hipérbola [Punto F, Punto G, Número a]: Crea la hipérbola con puntos focales F y G y eje principal de longitud a. Condición: $0 < 2a <$ Distancia$[F, G]$.

   c) Hipérbola [Punto F, Punto G, Segmento s]: Crea la hipérbola con puntos focales F y G siendo la longitud del eje principal igual a la del segmento s ($a =$ Longitud$[s]$).

   d) Hipérbola [Punto A, Punto B, Punto C]: Crea la hipérbola con puntos focales A y B que pasa por el punto C.

      - Con vértices $V_1 := (5, 0)$, $V_2 := (-5, 0)$ y focos $F_1 := (7, 0)$ y $F_2 := (-7, 0)$.
      - Con focos $F_1 := (0, 10)$ y $F_2 := (0, -10)$ y el punto que pertenece a la hipérbola $A := (2, 3)$.
      - Focos $(2, 3)$ y $(6, 3)$ con excentricidad 2.

5. Trazar las parábolas que tengan las siguientes características:

   - De foco $(-2, 4)$ y vértice $(1, 4)$.
   - de Foco $(4, 0)$ y directriz $x + 4 = 0$.
   - de vértice $V = (0, 4)$ y directriz $y = -2$.

Parte 3

Realizar los siguientes ejercicios de aplicación y justificar todos los cálculos.

1. ¿Es posible encontrar la intersección entre la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 7 = 0$ y la recta $y = -3x - 6$? ¿Por qué?
2. Hallar las ecuación de la siguiente elipse que pasa por el punto $P = (4, 15/4)$ y tiene por focos los puntos $F_1 = (4, 2)$ y $F_2 = (-2, 2)$. Determinar sus elementos notables y dibujarla.
3. Calcular la ecuación de la hipérbola que tiene por vértices los puntos $(1, 2)$ y $(1, 6)$ y pasa por el punto $(3, 8)$.
4. Hallar la ecuación y graficar la parábola que tiene eje principal la recta $x = -2$, la directriz $y = 3$ y con parámetro $p = 4$.
5. Indicar la opción correcta:

   a) La ecuación $y^2 - 6x - 4y - 20 = 0$ corresponde a...

- … una parábola cuyo vértice es $V = (-4, 2)$.
- … una parábola cuyo eje es la recta de ecuación $y = -4$.
- … dos rectas que se cortan en un punto.

b) La ecuación $5x^2 + y^2 = 1$ corresponde a...

- … una elipse con focos en el eje X.
- … una elipse con focos en el eje Y.
- … una hipérbola.

6. Completar cuadrados en las siguientes ecuaciones y determinar qué tipo de cónica es, sus elementos notables y su representación gráfica:
   - $3x^2 + 3y^2 + x + 5y + 1 = 0$.
   - $3x^2 - 3y^2 + x + 5y + 1 = 0$.
   - $3y^2 + x + 5y + 1 = 0$.
7. Sea L una recta y F un punto que no está en la recta. Tomando como eje Y la recta L y como el eje X la recta perpendicular a L que pasa por el punto F, determinar la ecuación de lugar geométrico de los puntos P para los que el cociente entre su distancia a L y su distancia a F es constante $e > 0$,

$$\frac{d(P,F)}{d(P,L)} = e.$$

   Probar los siguientes ítems:
   - Si $e = 1$, dicho lugar geométrico es una parábola.
   - Si $0 < e < 1$, dicho lugar geométrico es una elipse.
   - Si $e > 1$, dicho lugar geométrico es una hipérbola.

Breve comentario de cómo trabajar con las consignas

Este trabajo práctico forma parte de la última unidad (8) de la materia *Cónicas como lugar geométrico.*

Los objetivos de este trabajo práctico son:

- A partir de la lectura reflexiva de un material, los estudiantes puedan contestar de manera ordenada preguntas que invitan a la justificación de las afirmaciones que da un texto matemático.
- Mediante la exploración con Geogebra los estudiantes comprendan los determinados elementos de las cónicas como lugar geométrico y llegar a las ecuaciones que las modelizan.

La propuesta de este trabajo práctico final es que los alumnos se reúnan en grupos de dos o tres y elijan tres ejercicios de cada parte. Estos grupos tienen que entregar en un plazo determinado, las respuestas a los ejercicios que eligieron, justificando sus afirmaciones y explicando claramente cuáles son las definiciones o teoremas aplicados. El docente, en este punto, puede evaluar cómo los estudiantes justifican sus argumentaciones y si la resolución de los ejercicios elegidos es clara y ordenada.

Luego, en una segunda parte, el docente puede elegir uno o dos ejercicios resueltos por cada grupo e invitarlos a que los expongan en el pizarrón. También, generar con los y las estudiantes un debate y reflexión acerca de si la escritura y las argumentaciones matemáticas dadas por cada grupo son correctas.

ANEXO

C

Modelos de evaluaciones

Para concluir, incluimos aquí dos modelos de evaluación para la materia, con ejercicios de aplicación de conceptos y, también, de argumentación de alguna respuesta dada.

No se incluyen las respuestas, sino un breve comentario del objetivo de cada problema y algunos errores frecuentes que suelen cometer los estudiantes. Es importante que en una clase posterior a la evaluación se aborden esos errores: las evaluaciones forman parte del proceso de enseñanza–aprendizaje, y por lo tanto, se tiene que trabajar con las producciones de los estudiantes.

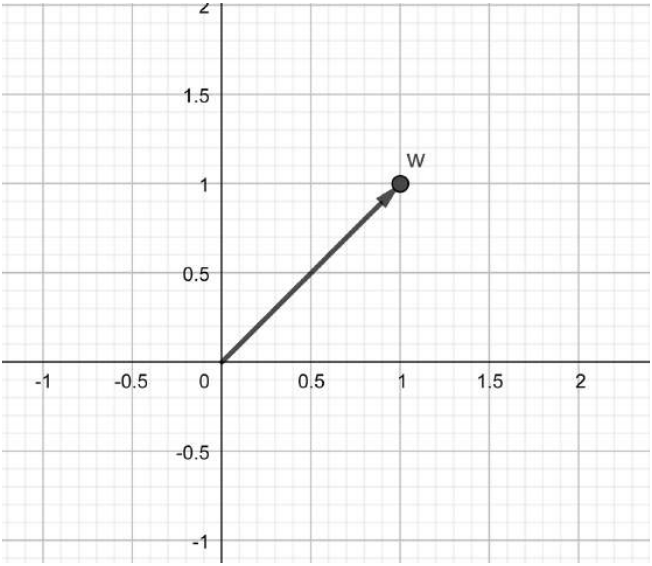
El modelo del primer parcial incluye los temas de los capítulos 1 al 4. El modelo del segundo parcial incluye los temas de los capítulos 5 a 7.

Modelo para el primer parcial

Ejercicio 1. *Indicar por qué la siguiente afirmación es verdadera en los números complejos, pero es falsa en los números reales.*

a) $(1-\sqrt{-3})(1+\sqrt{-3}) = 1-(-3) = 4.$

b) *Sea* $z = \sqrt{2}(cos(\frac{2\pi}{8}) + isen(\frac{2\pi}{8}))$ *y sea* w *el número complejo representado en el plano complejo.*



Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar las decisiones.

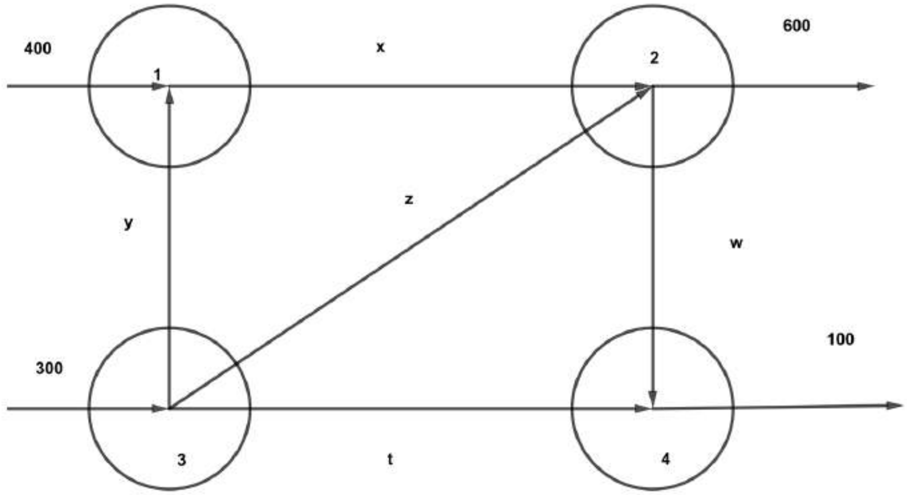
a) z *y* w *tienen los mismos módulos, pero distintos argumentos.*

b) z *y* w *son iguales escritos en distintas representaciones.*

c) z *y* w *tienen los mismos argumentos, pero distintos módulos.*

d) z *y* w *son iguales porque tienen los mismos argumentos y los mismos módulos.*

Ejercicio 2. *La siguiente red representa el flujo vehicular en un sector de la ciudad. Los nodos son las intersecciones y los arcos, las carreteras. Las flechas indican el sentido del movimiento de los vehículos.*



Las cantidades de vehículos que circulan por la red entre dos nodos consecutivos se indican con las letras x, y, z, w y t, las cuales son las variables del problema.

a) *¿Es posible modelizar el problema a partir de un sistema de ecuaciones lineales? Si es así, formular un sistema de ecuaciones lineales cuya solución aporte todas las opciones posibles de flujo vehicular.*

b) *Resolver el sistema de ecuaciones lineales planteado indicando el método de resolución que se usó y verificar que la solución encontrada sea solución del sistema de ecuaciones lineales. ¿Qué indican las soluciones del sistema hallado en relación con el problema?*

c) *El flujo vehicular entre el nodo 1 y 2 es 550 y entre el nodo 2 y 4 es 50. Calcular los otros flujos.*

Ejercicio 3. *Se ha medido la velocidad de un vehículo durante un desplazamiento. La siguiente tabla recoge la velocidad del vehículo en función del tiempo.*

Tiempo (horas)	Velocidad (km/h)
0	0
1	30
2	40
3	30
4	0

a) *Definir las variables del problema e identificar las restricciones sobre los datos.*
b) *Ubicar los puntos dados en el plano cartesiano. ¿Tiene sentido unir los puntos mediante una línea continua? ¿Por qué?*
c) *La ecuación que modela la velocidad del vehículo a medida que pasa el tiempo está dada por* $y = ax^2 + bx + c$. *Seleccionar tres puntos cualesquiera de la tabla y plantear un sistema de ecuaciones lineales para determinar* a, b, c.
d) *¿Cuál es la matriz de coeficientes asociada al sistema planteado anteriormente? ¿Dicha matriz es inversible? Si la respuesta es afirmativa, encontrar la solución del sistema a partir de la inversa de la matriz de coeficientes asociado al sistema.*
e) *¿Hay otra manera de encontrar la solución del sistema? ¿Cuál?*
f) *¿Qué representa el dato* $(2, 40)$*?*

Ejercicio 4. *¿Para qué valores de a el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene solución no trivial?*

$$\begin{cases} (1-a)x + z = 0 \\ (1-a)y - 2z = 0 \\ (1-a)z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 5. *Dar al menos un ejemplo que muestre que cada una de las siguientes afirmaciones es falsa.*

a) *Si* A *es una matriz de tamaño* 2×2 *tal que* $\det(A) = 15$, *entonces* $\det(2A) = 30$.
b) *Si* A *es una matriz de tamaño* 2×2 *cumple que* $A \cdot A = A$, *entonces* A *es inversible.*

¿Por qué la afirmación del ítem a) es falsa? ¿Sobre qué propiedad está apoyada dicha afirmación?

Algunos comentarios sobre el primer parcial modelo

Ejercicio 1

El primer ítem permite observar que hay ciertos cálculos que son válidos en un conjunto numérico pero no en otro. En este punto, en los números reales no tiene sentido calcular la raíz cuadrada de un número negativo, en cambio sí en los números complejos.

Quizá los estudiantes no puedan justificar correctamente por qué no es válida la cuenta planteada en los números reales. Por ejemplo, pueden pensar que en los números reales no vale la afirmación porque $-\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-3} = -\sqrt{9} = -3$. Esta justificación es errónea ya que la propiedad $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ es válida para todo $a, b \in \mathbb{R}$ no negativos. También pueden afirmar que es verdadera en los reales ya que $-\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-3} = -(\sqrt{-3})^2 = -(-3)$; y esto es un error.

En cuanto a pensar la cuenta en los números complejos, un error común de los alumnos es que argumenten que $\sqrt{-3}$ en $\mathbb{C}$ es solamente $\sqrt{3}i$.

El segundo ítem involucra distintas representaciones de un número complejo. Ambos complejos z y w son el mismo, pero z está escrito en su representación trigonométrica, mientras que w está escrito en su representación vectorial o binómica.

Una de las dificultades que pueden presentar los alumnos en este punto es no poder justificar correctamente cuándo una afirmación es verdadera o cuándo es falsa. Tanto en el ítem b) como en el ítem c) son verdaderas.

Estos conceptos ya fueron trabajados en el capítulo 1.

Ejercicio 2

Este es un problema de flujo vehicular. Su objetivo es que planteen un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema. El sistema tiene 4 ecuaciones con 5 incógnitas y su número de soluciones es infinito. Los alumnos pueden tener la dificultad de no poder modelizar el problema. Ahí se puede recordar los principios básicos de la circulación vehicular; estos principios ya fueron trabajados en clase.

En cuanto a la resolución del sistema, los estudiantes pueden usar el método de eliminación gaussiana o la de Jordan. No pueden usar la regla de Cramer ni el método de la inversa, ya que el sistema no tiene la misma cantidad de ecuaciones que de incógnitas. Otra de las dificultades que trae este problema es que los alumnos no puedan interpretar correctamente qué significan las infinitas soluciones del sistema de ecuaciones lineales hallado.

El último punto tiene el objetivo de encontrar la solución cuando ya se sabe lo que pasa en algunos flujos vehiculares.

Este problema contiene los temas trabajados en el capítulo 2.

Ejercicio 3

Un primer objetivo de este problema es relacionar la información dada en una tabla con la dada en un gráfico. Otro registro en donde se puede obtener la información de la velocidad de un vehículo según el tiempo que pasa, es la dada por una fórmula. En este punto el problema afirma que la fórmula $y = ax^2 + bx + c$ modeliza el problema, en el sentido que para cualquier valor de x (tiempo en horas) uno puede obtener la velocidad y medida en km/h.

Una manera de encontrar esta fórmula es resolviendo un sistema de ecuaciones lineales. El problema propone que se encuentre la solución a partir de la inversa de la matriz de coeficientes. Por lo tanto, una dificultad que se puede presentar es calcular correctamente la inversa de dicha matriz.

Por último, este problema permite contextualizar la solución del sistema en relación con la situación presentada.

Los contenidos de este ejercicio se encuentra en el capítulo 3.

Ejercicio 4

El objetivo de este problema es encontrar una condición para el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas tenga infinitas soluciones.

Una dificultad que puede surgir en este ejercicio es que los estudiantes intenten encontrar las infinitas soluciones y se pierdan en las cuentas. En este ejercicio no pregunta cuáles son las infinitas soluciones sino las condiciones para que esto ocurra.

Una manera sencilla de encontrar las condiciones para que el sistema homogéneo tenga infinitas soluciones es que el determinante de la matriz de coeficientes sea nula, es decir que $\det(A) = (1 - a)^3 = 0$, donde A es la matriz de coeficientes asociada al sistema de ecuaciones lineales.

Los temas de este ejercicio se encuentran en el capítulo 4.

Ejercicio 5

El objetivo de este ejercicio es que los estudiantes puedan argumentar por qué una afirmación es falsa a través de un contraejemplo. En ambos casos, los ejemplos son matrices de tamaño 2×2 para que los cálculos sean más sencillos.

Una dificultad que puede presentarse en este problema es que los alumnos no recuerden cuál es la propiedad referida a la función determinante que justifica por qué la afirmación del ítem a) es falsa.

Los contenidos de este ejercicio se encuentran en los capítulos 3 y 4.

Modelo para el segundo parcial

Ejercicio 1. *Sea* $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0\}$ *el subespacio definido en* $\mathbb{R}^3$.

a) *¿*$(0, 0, 0)$ *pertenece a* H*?*

b) *Si* v *y* w *son dos elementos de* H*, ¿se puede afirmar que* $v + w$ *pertenecen a* H*?*

c) *Indicar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:* kv *pertenece a* H *para todo* $v \in H$ *y* $k \in \mathbb{R}$.

d) *A partir de los ítems anteriores, ¿se puede afirmar que* H *es un subespacio de* $\mathbb{R}^3$*? ¿Por qué?*

Ejercicio 2. *Sean* $u = (1, -2, k)$, $v = (3, 0, -2)$ *y* $w = (2, 1, -5)$ *vectores de* $\mathbb{R}^3$.

a) *¿Es posible encontrar un* $k \in \mathbb{R}$ *de manera que* u *sea combinación lineal de los vectores* v *y* w*?*

b) *Tomando* $k = 1$*, ¿se puede decir que* u*,* v *y* w *forman una base de* $\mathbb{R}^3$*? ¿Por qué?*

c) *Explicar cómo encontrar un vector ortogonal a* v *de norma 1.*

Ejercicio 3. *Sea el sistema de ecuaciones lineales* $A \cdot X = 0$,

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) *Encontrar dos vectores linealmente dependientes que sean solución del sistema de ecuaciones lineales.*

b) *Encontrar dos vectores linealmente independientes que sean solución del sistema.*

c) *¿Es posible encontrar tres vectores linealmente independientes que sean solución del sistema? ¿Por qué?*

Ejercicio 4. *Sea* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *la función definida por* $T(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) *Dibujar el cuadrado de vértices* $v_1 = (0, 0)$, $v_2 = (1, 0)$, $v_3 = (1, 1)$ *y* $v_4 = (0, 1)$.

b) *¿Qué cuadrilátero se forma con los vértices* $T(v_1)$, $T(v_2)$, $T(v_3)$ *y* $T(v_4)$*?*

c) *¿Se puede decir que T es una transformación lineal? Si la respuesta es afirmativa, dar una justificación.*

d) *¿Cuáles son los autovalores y autovectores asociados a A?*

Ejercicio 5. *Sea Π el plano que pasa por los puntos $P = (2, 3, -1)$, $Q = (1, 0, -1)$ y $R = (0, -2, 1)$ y sea Π_1 el plano definido por $\Pi_1 : 2x - 2y + 4z = 0$.*

a) *¿Es posible que los planos Π y Π_1 no sean paralelos? Dar un argumento de cómo decidir si son paralelos o no antes de realizar alguna cuenta.*

b) *Dados dos planos cualesquiera, ¿cuáles son las posibles descripciones de la intersección entre ellos? En el caso de los planos Π y Π_1, ¿qué describe la intersección entre ellos?. Dar las ecuaciones explícitas de dicha intersección.*

c) *¿El punto $(5, 15, 4)$ se encuentra en la intersección de los planos Π y Π_1?*

Algunos comentarios sobre el segundo parcial modelo

Ejercicio 1

El objetivo de este ejercicio es mostrar, a partir de los ítems a), b) y c), que el conjunto H forma un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

La dificultad que puede presentar es que los estudiantes no puedan demostrar que las afirmaciones de los ítems b) y c) valen para todo v y w en H.

Los contenidos de este ejercicio se encuentran en el capítulo 5.

Ejercicio 2

Este ejercicio tiene dos objetivos diferenciados: en los dos primeros ítems se evalúa la noción de combinación lineal y de base de un espacio vectorial, y en el último ítem se pregunta por la noción de vector ortogonal de norma 1 a uno dado.

Las dificultades que presentan estos ítems son las siguientes. En el primero, los estudiantes tienen que encontrar el valor de k para que el vector u sea combinación lineal de v y w. Este problema se relaciona con encontrar la solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas. En este punto no se pregunta solamente por los valores de α, β para que

$$(1, -2, k) = \alpha v + \beta w,$$

sino si es posible encontrar un valor de k de manera que existan esos valores α y β. Por otro lado, la dificultad en el ítem b) es que los estudiantes no recuerden cuáles son las condiciones para que tres vectores formen una base. Algunos pueden probar que u, v, w son linealmente independientes y generan $\mathbb{R}^3$. Otros, en cambio, solo probar que son linealmente independientes y, como son tres (cantidad que coincide con la dimensión de $\mathbb{R}^3$), decidir que estos vectores forman una base.

Por último, el ítem c) tiene la dificultad adicional de que no se pide encontrar un vector ortogonal a v de norma 1, sino explicar cuáles son los pasos necesarios para encontrarlo.

Los temas de este ejercicio se encuentran en los capítulos 5 y 7.

Ejercicio 3

Este ejercicio se puede resolver de varias maneras. Una de ellas es encontrar la solución y, a partir de ahí, contestar las preguntas; otra es encontrar posibles soluciones que cumplan con lo pedido. La dificultad que puede surgir es que, para contestar el ítem c), necesariamente tienen que encontrar la solución e interpretar qué quiere decir a la luz de la pregunta planteada.

En el último ítem es imposible encontrar tres vectores linealmente independientes que sean solución del sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

ya que estas soluciones se encuentran en el plano

$$(x, y, z) = \alpha(1, 1, -1, 0) + \beta(0, 0, -1, 1),$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Aquí la dificultad reside en que los estudiantes pueden no justificar correctamente por qué no es posible encontrar esos tres vectores linealmente independientes.

Los temas de este ejercicio se encuentran en el capítulo 5.

Ejercicio 4

Los ítems a) y b) están referidos a cuál es el efecto de aplicarle la función T a vectores de $\mathbb{R}^2$. En este caso transforma el cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$ en un rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 3)$ y $(0, 3)$.

En el ítem c) se pide mostrar si T es una transformación lineal. La dificultad en este punto es que los estudiantes tienen que demostrar que para cualesquiera v, w en $\mathbb{R}^2$ y $k \in \mathbb{R}$ se tiene que $T(v + kw) = T(v) + kT(w)$.

El último ítem pide encontrar los autovalores y autovectores de A, matriz canónica asociada a la transformación lineal T. Para este ejercicio no es necesario calcularlos usando el método visto en clases ya que basta observar lo trabajado en el ítem a).

Los temas de este ejercicio se encuentran en el capítulo 6.

Ejercicio 5

La dificultad de este ejercicio reside en que no hay una descripción del plano Π, por lo que para decidir si los planos Π y Π_1 son paralelos o se cortan, se necesita encontrar la ecuación que describe al plano Π.

En el primer ítem se pide explicar previamente al cálculo cómo se puede decidir si los planos son paralelos o no. En este punto los estudiantes deberían recordar que para que dos planos sean paralelos, tiene que ocurrir que las normales lo sean.

Los últimos dos puntos tiene que ver con la intersección de dos planos. Estas posibles intersecciones pueden darse mediante una recta o un plano. En este punto la intersección de los planos Π y Π_1 es una recta.

Los temas de este ejercicio se encuentran en el capítulo 7.

Bibliografía

Akoglu, Ali; Yoon Kah Leow; Ibrahim Guven y Erdogan Madenci (2011). “High performance linear equation solver using NVIDIA GPus”. En: *2011 ASA/ESA Conference on Adaptive Hardware and Systems*.

Alarcón Villegas, Jairo Mauricio (2017). “Análisis de flujo de carga en el sistema de distribución eléctrico basado en cadenas de Markov”. Repositorio digital. En: *Universidad Politécnica Salesiana. Ecuador*, págs. 1-12.

Angelo, Thomas y Patricia Cross (1993). *Classroom assessment techniques: A handbook for college teachers*. Jossey-Bass Publishers.

Arahal, Manuel; Manuel Berenguel Soria y Francisco Rodríguez Díaz (2006). *Técnicas de predicción con aplicaciones en ingeniería*. Universidad de Sevilla.

Archila Diaz, John Faber; Luis Eduardo Bautista Rojas y Jorge Villamizar Morales (2011). “Transformaciones lineales de dimensión finita, aplicadas al desarrollo del modelo cinemático directo para el robot KUKAKR 60 JET R en cursos de álgebra lineal y dibujo de máquinas”. En: *Matemáticas: Enseñanza Universitaria* XIX, págs. 33-47.

Balla, Liliana María; María Mercedes Gaitán y Liliana Beatriz Taborda (2011). “Álgebra lineal en el análisis del estado tensional en un punto”. En: *Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Paraná*.

Borrell, Guillem (2010). *Introducción a Matlab y Octave. Release 0.1*. Free Software Foundation.

Braskamp, Larry y John Ory (1994). *Assessing faculty work: Enhancing individual and institutional performance*. Jossey-Bass Publishers.

Brookfield, Stephen (1995). *Becoming a critically reflective teacher*. Jossey Bass Publishers.

Campbell, Hugh (1971). *Linear Algebra with Applications including Linear Programming*. Prentice Hall.

Carlson, David; Charles Johnson; David Lay y Duane Porter (1997). "The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra, en Resources for Teaching Linear Algebra". En: *Mathematical Association of America*.

Castillo Ron, Enrique; Jesús Conejo Navarro y Pablo Pedregal Tercero (2002). *Formulación y Resolución de Modelos de Programación Matemática en Ingeniería y Ciencia*. Universidad de Castilla.

Dodier, Jean-Luc (2000). "On the Teaching of Linear Algebra". En: *Mathematics Education Library*.

Domínguez-Jiménez, María Elena (2011). "Matrices: un modelo para las fotografías digitales". En: *Modelling in Science Education and Learning* 4, págs. 169-179.

González Filgueira, Gerardo y Cesar Vidal Feal (2011). "Cálculo de vibraciones mecánicas por métodos matriciales". En: *Universidad de La Coruña*, págs. 1-12.

González, Cecilia Zulema y Horacio Agustín Caraballo (1954). *Mecánica de vibraciones*. México, DF y CECSA.

——— (2013). *Matemática básica para ingeniería agronómica e ingeniería forestal*. Editorial Universidad de la Plata, págs. 31-36, 41-52.

Hillel, Joel (2000). "Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra". En: *Mathematics Education Library* 23, págs. 191-207.

Hohenwarter, Markus y Judith Hohenwarter (2010). *Documento de ayuda de Geogebra. Manual Oficial de la versión 3.2*. URL: www.geogebra.org.

Hurley, Dennis (1974). *Circuitos eléctricos y Series de Fourier*. Apuntes ESFM del IPN.

Kolman, Bernard y David Hill (2006). *Álgebra Lineal*. Pearson Prentice Hall.

Lay, David (2012). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. 4.ª ed. Pearson Educación de México.

Leontief, Wassily (1936). "Quantitative input and output relations in the economic systems of the United States". En: *The Review of Economics and Statistics*.

Luzardo, Deivi y Alirio Peña (2006). "Historia del Algebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX". En: *Divulgaciones matemáticas* 14, págs. 153-170.

Meier, John y Thomas Rishel (1998). "Writing in the teaching and learning of mathematics". En: *The Mathematical Association of America* 18, págs. 105-125.

Palos-Sánchez, Leticia; Mario Iván Jaen-Márquez y Rafael Rivera-Lopez (2015). "Modelado orientado a objetos del problema de balanceo de ecuaciones químicas y su resolución con métodos algebraicos". En: *Programación Matemática y Software* 3, págs. 52-63.

Parra, Cecilia e Irma Saiz, comps. (1994). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Editorial Paidós Educador.

Salgado, Mario; Juan Yuz y Ricardo Rojas (2014). *Análisis de Sistemas lineales*. Valparaíso (Chile): Departamento de Electrónica. Universidad Técnica Federico Santa María Valparaíso.

Strang, Gilbert (2006). *Álgebra Lineal y sus aplicaciones*. Paraninfo.

Szabolcsi, Robert (2009). "Modelling of dynamical systems". En: *Évfolyam* IV.IV.

Vargas Felix, José Miguel (2010). *Cálculo de Estructuras Utilizando Elemento Finito con Cómputo en Paralelo*. CIMAT, centro de investigación en Matemática A. C, Maestría en Ciencias con especialidad en computación y matemáticas industriales.

Este libro se terminó de imprimir en septiembre de 2019,
en Área Cuatro SRL,
Chingolo 480, Rincón de Milberg, pcia. de Buenos Aires (1624).

LIBRO PARA EL DOCENTE

ÁLGEBRA LINEAL

Esta obra ofrece una propuesta para la enseñanza de Álgebra y Geometría Analítica en carreras de ingeniería. Se basa en la experiencia docente de la autora en la Universidad Nacional de Hurlingham (UNAHUR), donde la materia se dicta para las ingenierías Metalúrgica y Eléctrica, y la Tecnicatura Universitaria en Energía Eléctrica. La selección de temas y las decisiones didácticas parten de considerar estos contenidos como una herramienta con múltiples aplicaciones en el futuro desempeño profesional de los y las estudiantes. *Álgebra Lineal* incluye secuencias didácticas fundamentadas, problemas modelo con desarrollos de su resolución y ejercicios que requieren el uso de programas como Geogebra y Octave.

Esta obra para docentes se complementa con *Álgebra Lineal. Libro para el estudiante*, una compilación de problemas, para cada tema e integradores, que fueron probados en las clases y cuyo fin es andamiar los aprendizajes, entrenar el razonamiento y fortalecer las habilidades matemáticas de los y las estudiantes.

Mariana Valeria Pérez es profesora de Enseñanza Media y Superior, licenciada y doctora por la Universidad de Buenos Aires (UBA) en el área de Ciencias matemáticas, e investigadora del CONICET. Su campo de estudio incluye la geometría aritmética computacional y el análisis probabilístico de algoritmos, temas sobre los cuales ha publicado varios artículos en revistas internacionales. También investiga sobre la enseñanza de la matemática, particularmente sobre el uso y el impacto de las nuevas tecnologías. Actualmente, es profesora en la Universidad Nacional de Hurlingham, donde dicta Álgebra I y II.

ISBN 978-987-47285-0-0

UNIVERSIDAD NACIONAL DE HURLINGHAM

Libros de UNAHUR

9 789874 728500