

Algunas categorías emergentes para el análisis semiolingüístico de la resolución de ecuaciones. Resultados de una primera aproximación al campo

Mauro Fernando Nicodemo
✉ mauro.nicodemo@unahur.edu.ar

Introducción

Esta ponencia se enmarca en las primeras aproximaciones al campo realizadas para el desarrollo de una tesis doctoral sobre la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de ecuaciones, abordados ambos desde una perspectiva semiolingüística. En dicha tesis se tratan distintas cuestiones vinculadas a esta práctica que están relacionadas con las escrituras simbólicas en cuanto sistema semiótico, para lo cual se toman como referencia los estudios y los aportes de Drohuard (2010a; 2010b). Su intención es dar cuenta de las implicancias que tienen algunas cuestiones de orden semiótico y lingüístico en las posibilidades de los estudiantes al resolver.

El objetivo principal de la tesis es establecer relaciones entre las posibilidades que presentan los estudiantes del Ciclo Básico de las escuelas secundarias urbanas de la Provincia de Buenos Aires para resolver ecuaciones y la ausencia o la presencia, y en qué grado, de componentes semánticos articulados con componentes sintácticos en la enseñanza de esta práctica. Para lograrlo, respecto a las prácticas asociadas a la resolución de ecuaciones se propone el estudio de:

- las que ponen en juego expertos en Matemática (profesores de Nivel Secundario, profesores de Nivel Universitario e investigadores);
- las que enseñan docentes de escuelas secundarias;
- las que despliegan estudiantes de Nivel Secundario en proceso de aprendizaje; en todos los casos, como ya se mencionó, desde una perspectiva semiolingüística.

En particular, uno de sus objetivos específicos consiste en producir un modelo explicativo de la resolución experta de ecuaciones a partir de los componentes sintácticos y semánticos, y de su articulación, que están presentes en los mecanismos que emplean los expertos al resolver. La intención es utilizar este modelo para analizar el discurso de los docentes al enseñar y las resoluciones de los estudiantes luego de haber transitado un proceso de enseñanza.

Para la producción de los datos relacionados con las resoluciones de los expertos se prevé administrar a los sujetos seleccionados un instrumento que contenga una cantidad de ecuaciones para que resuelvan y, luego, en un momento inmediatamente posterior, realizarles entrevistas clínicas con el objetivo de que den cuenta de cómo resolvieron y por qué lo hicieron de esa manera.

En el caso de los datos relacionados con las resoluciones de los estudiantes, estos también se prevé que estén compuestos por producciones escritas y por discursos verbales que fundamenten las transformaciones y les den sustento a las decisiones tomadas durante las resoluciones. Para su producción propone utilizar la misma estrategia que para las resoluciones de los expertos: la administración a los sujetos de un instrumento que contenga una cantidad de ecuaciones para que resuelvan y, luego, la realización de entrevistas clínicas con el objetivo de que den cuenta de cómo resolvieron y por qué lo hicieron de esa manera.

Como modo de preparación para el desarrollo del trabajo de campo de la investigación se hizo un primer acercamiento, tanto con estudiantes como con expertos, con el propósito de testear y ajustar la estrategia metodológica en relación a la producción y al análisis de los datos. El objetivo central de esta ponencia es describir algunas problemáticas vinculadas a los instrumentos de producción de datos y a su análisis que emergieron en este primer acercamiento.

Para que estas problemáticas puedan ser apreciadas en su justa medida consideramos que es necesario enmarcarlas dentro del diseño metodológico del proyecto de investigación. Por esta razón, en una primera sección se describen algunos conceptos del marco teórico. En una sección posterior se intenta dar un panorama de cómo se hicieron estas primeras aproximaciones al campo, para lo que se detallan algunas de las categorías de análisis construidas a priori y los indicadores que permitirían inferirlas. En otro apartado de esta misma sección se presentan algunas de las ecuaciones utilizadas en el campo, acompañadas de una fundamentación de su elección. En la sección siguiente se presentan resoluciones de ecuaciones y relatos y transcripciones de las entrevistas realizadas a estudiantes y expertos, a partir de las cuales fue que se identificaron las problemáticas mencionadas. A su vez, se describe cómo se llegó a reconocerlas y detectarlas, y se enuncian preguntas e interrogantes que se consideran fértiles para guiar el trabajo posterior. Para finalizar con la ponencia se exponen una serie de conclusiones acerca de cómo se piensa mejorar el diseño metodológico y engrosar el marco teórico con el fin de poder incorporar al análisis los elementos que no estaba siendo posible considerar.

Algunos conceptos del marco teórico: sintaxis, semántica y denotación

Para el desarrollo de la tesis se seleccionó la línea de investigación en Didáctica de la Matemática que propone estudiar las cuestiones semióticas y lingüísticas vinculadas a las prácticas matemáticas. En particular, se tomaron los trabajos de Jean-Philippe Drouhard como el núcleo alrededor del cual construir el marco teórico.

En sus investigaciones el autor propone estudiar las escrituras simbólicas y sus transformaciones desde una perspectiva lingüística. Por ejemplo, al afirmar que el álgebra escolar no es un lenguaje pero que sí contiene un lenguaje, concluye que al pensar en su enseñanza y en su aprendizaje resulta indispensable abordar las cuestiones semióticas ligadas a él. Específicamente, propone estudiar sus sintaxis (Drouhard, 2010a) y su semántica (Drouhard, 2010b). Su sintaxis, debido a la existencia de una estructura gramatical vinculada a la

correcta escritura de las expresiones, pero también a que existen reglas de transformación sintácticas que operan sobre esas estructuras. Su semántica, porque la validez de esas reglas no puede determinarse si no es a partir de lo que ellas denotan. Es decir que una regla de transformación solamente es válida si conserva la denotación de las escrituras, lo que de alguna manera combina la sintaxis y la semántica. Como consecuencia de estas consideraciones, la tesis se propone mostrar que no sólo resulta indispensable el estudio de la sintaxis y de la semántica de las escrituras algebraicas sino también de la articulación entre ellas.

Con respecto a las nociones específicas de sintaxis y semántica, para desarrollar la perspectiva de análisis de la investigación se tomaron las descripciones de Ducrot y Todorov (2011). Al referirse a estos conceptos desde la perspectiva de la Lógica, los autores afirman que:

el punto de vista sintáctico consiste en determinar las reglas que permiten construir frases o fórmulas correctas, combinando los símbolos elementales. La semántica se propone obtener el medio de interpretar esas fórmulas, de ponerlas en relación con otra cosa: esa “otra cosa” puede ser la realidad, o bien otras fórmulas (de ese mismo lenguaje o de otros lenguajes).
(p. 380)

Estas caracterizaciones están en línea con el constructo teórico elaborado por Drouhard. En él se abordan las cuestiones semánticas vinculadas a las Escrituras Simbólicas del Álgebra (ESA) sobre la base de los trabajos originarios de Frege (1974), en los que se desarrollan los conceptos de denotación y sentido. Drouhard emplea el concepto de denotación para sostener que son las consideraciones semánticas las que les permiten a los sujetos tomar decisiones y, en consecuencia, las que guían sus resoluciones.

La noción de denotación es clave en el cálculo simbólico: es esta noción la que marca la diferencia entre el puro cálculo formal de las computadoras y el cálculo en tanto práctica. Además, es esta noción la que justifica las transformaciones (de ahí que es una componente esencial de la “teoría” en su dimensión matemática). Sin denotación, no hay ninguna razón para preferir tal transformación a tal otra, salvo la de llegar más fácilmente al objetivo (es lo que hacen los alumnos cuando permanecen en el dominio pragmático). (2010b, p. 6)

Para comprender mejor a qué se refiere Frege con el concepto de denotación y cómo la utiliza Drouhard para analizar las transformaciones podemos tomar como ejemplo el caso específico de las ecuaciones. La denotación de una ecuación está dada por su conjunto solución. Así, la transformación de una ecuación es válida solamente si conserva el conjunto solución. Por ejemplo, en el caso de $2x + 3 = 7$ y $2x = 7 - 3$ la transformación que se realiza “sacando” “+ 3” en el miembro izquierdo y “agregando” “- 3” en el miembro derecho es válida porque el conjunto solución de la ecuación que se obtiene es el mismo que el de la ecuación de la que se parte.

Primeras aproximaciones al campo y su análisis

En esta sección se describe el modo en el que se realizó esta primera “entrada” al campo: la definición de categorías de análisis a priori, la confección de instrumentos de producción de datos escritos y del repertorio de preguntas previstas para las entrevistas orales.

Algunas categorías a priori

Para lograr el tipo de análisis planteado en la tesis, las categorías empleadas deben permitir la identificación de componentes sintácticos, de componentes semánticos y de su articulación en los mecanismos puestos en juego en las resoluciones de ecuaciones. En la mayoría de los casos las transformaciones no pueden ser categorizadas analizando solamente las escrituras, por lo que resulta necesario analizar también el discurso del sujeto que las produjo que da cuenta sobre qué se basó para realizar esas escrituras. Por este motivo, al presentar las categorías y algunas posibles escrituras asociadas que permiten inferirlas, se incluyen también posibles expresiones verbales que permitirían identificar los tipos de componentes empleados durante las resoluciones y, de existir, su articulación.

A continuación se presentan en un cuadro algunas de las categorías construidas a priori que se utilizaron para realizar el análisis de la evidencia empírica, acompañadas de sus correspondientes indicadores y de algunos ejemplos.

Lectura de expresiones	
Sintáctico	Reconocimiento de la estructura sintáctica de una expresión, lo que implica: identificar las operaciones que la componen y establecer su jerarquía; en la expresión $2 \cdot (x-3)$, al valor que tome la variable primero se le resta 3 y, después, al resultado se lo multiplica por 2; “En esta expresión el 2 multiplica a todo el paréntesis, es decir, al resultado de $x-3$.”; identificar los roles o las funciones de los signos y de qué manera se aplican; “En la expresión $5-2x$ el signo menos no indica que el 2 es negativo sino que ‘hay’ una resta. En este caso $2x$ ‘le resta’ a 5.”
Semántico	Asignación de sentido a las expresiones. Por ejemplo, al reconocer el patrón de la expresión $2x+1$ y nombrarla como “los números impares”, cuando x solamente toma valores naturales. Identificación de la denotación (o parte de ella) de expresiones. Por ejemplo, al determinar que todas las posibles imágenes de la función definida por la expresión $2x+1$ son números impares si x toma valores naturales. “Si x es un número natural, cuando se multiplica por 2 siempre da un número par; después, al sumarle 1 da un número impar.”
Articulación	Al determinar todas las posibles imágenes de la función definida por una expresión es posible que sea necesario articular lecturas de orden sintáctico y de orden semántico de las expresiones. Por ejemplo, en el caso de $2x+1$ resulta necesario reconocer las operaciones que la componen y su jerarquía para luego analizar y caracterizar cuáles son todos los posibles resultados del cálculo que surge al reemplazar la variable por números naturales: “Si x es un número natural, cuando se multiplica por 2 siempre da un número par; después, al sumarle 1 da un número impar.” También, en ecuaciones del tipo $3x+5=3x+4$, es posible analizar que “en ambos miembros primero se multiplica el valor de x por 3 y se obtiene como resultado el mismo número; luego en un caso se le suma 5 y en el otro se le suma 4, por lo que la igualdad no se cumple para ningún valor de x , es decir, la ecuación no tiene solución”.

Operaciones inversas	
Sintáctico	<p>Luego de realizar una correcta lectura de la estructura de la expresión al reconocer que $7x$ expresa $7 \cdot x$: transforma la expresión $7x=56$ en $x=56:7$, lo que es correcto; transforma la expresión $7x=56$ en $x=7:56$, lo que no es correcto.</p> <p>Ante una ecuación cuya solución por medio de una interpretación semántica resulta "evidente", apela a una transformación sintáctica. Por ejemplo, ante la ecuación $7x=70$ expresa $x=70:7$. Se podría inferir una ausencia de componentes semánticos en el mecanismo empleado.</p>
Semántico	<p>Ante la imposibilidad de resolver una ecuación del tipo $7x=56$ determinando mentalmente qué número multiplicado por 7 da 56, apela a la operación inversa y establece que la solución es 8 porque es el resultado de $56:7$. Posiblemente realice esta cuenta con una calculadora. "No sé qué número multiplicado por 7 da 56. Para calcularlo hago 56 dividido 7."</p>
Articulación	<p>Ante la imposibilidad de resolver una ecuación del tipo $7x=56$ determinando mentalmente qué número multiplicado por 7 da 56, apela a una transformación apoyada en relaciones sintácticas y obtiene la expresión $x=56:7$. "No sé qué número multiplicado por 7 da 56. Entonces, como lo que está multiplicando pasa dividiendo, lo pasé para el otro lado dividiendo."</p>

Propiedad uniforme	
Sintáctico	<p>Valida las transformaciones realizadas por medio de la propiedad uniforme apelando a reglas sintácticas del tipo "lo que se hace de un lado del igual hay que hacerlo del otro". Por ejemplo, ante la transformación $4x-15=2x+7 \rightarrow 4x-15+15=2x+7+15$ dice "como en el miembro izquierdo sumé 15 en el derecho también tengo que sumar 15". Las transformaciones realizadas aplicando la propiedad uniforme de esta manera pueden realizarse de manera incorrecta. Por ejemplo, con errores como el siguiente: $3x=2x+6 \rightarrow 3x \div 3=2x+6 \div 3 \rightarrow x=2x+2$. La presencia de errores de este tipo puede ser un indicador de que se está utilizando la propiedad uniforme como una regla sintáctica.</p>
Semántico	<p>Valida las transformaciones realizadas por medio de la propiedad uniforme al analizar y concluir que la veracidad de los nuevos enunciados se deduce de los anteriores como consecuencia de la aplicación de la propiedad. Por ejemplo, ante la transformación $4x-15=2x+7 \rightarrow 4x-15+15=2x+7+15$ dice que "si para un valor de x el resultado de $4x-15$ es el mismo que el de $2x+7$, entonces al sumarle 15 de los dos lados la igualdad se va a seguir cumpliendo".</p>
Articulación	<p>Utilización de las validaciones semánticas como regulación del modo de aplicar la propiedad uniforme y como mecanismos de control una vez aplicadas las transformaciones realizadas por reglas sintácticas del tipo "hay que hacer lo mismo de los dos lados del igual". Por ejemplo, ante la transformación incorrecta $3x=2x+6 \rightarrow 3x \div 3=2x+6 \div 3$ puede suceder que el estudiante identifique que para que el segundo enunciado sea verdadero como consecuencia de que el primero lo es (para el mismo valor de 'x' en ambos casos) es necesario dividir por 3 el 'resultado' de ambos miembros, por lo que se debe colocar un paréntesis: $3x \div 3=(2x+6) \div 3$.</p>

Cálculo mental (o reflexionado)	
Sintáctico	<p>Ante una ecuación del tipo $7x=70$ caracteriza a 70 como "7 al que se le agrega un 0". (No es un conocimiento estricto sobre ecuaciones)</p>
Semántico	<p>Ante una ecuación del tipo $7x=70$ determina que 10 es la solución porque $7 \cdot 10=70$. Pone en juego la noción de solución de una ecuación. "10 es la solución porque 7 por 10 es 70, entonces se cumple la igualdad."</p>

Cálculo mental (o reflexionado)	
Articulación	Ante una ecuación del tipo $7x=70$ caracteriza a 70 como "7 al que se le agrega un 0" y determina, en consecuencia, que x debe ser 10 para que se cumpla la igualdad, "porque multiplicar por 10 agrega un 0".

Si bien en esta tabla están descritas las articulaciones entre componentes semánticos y sintácticos que corresponden a una misma categoría, en los mecanismos de resolución la articulación se da entre componentes semánticos y sintácticos correspondientes a distintas categorías. Por ejemplo, para resolver la ecuación $2 \cdot (x-3)=10$ puede ser que un sujeto realice una correcta lectura sintáctica de la expresión y luego ponga en juego la noción semántica de solución de una ecuación al utilizar el cálculo mental para determinarla: reconoce que al valor de la variable primero se le resta tres y, después, al resultado se lo multiplica por 2; entonces, por medio del cálculo mental deduce que $x-3$ "tiene que dar" 5 y que, por lo tanto, la solución es 8.

La construcción del listado de ecuaciones a resolver y las posibles preguntas

Como ya se mencionó, para esta investigación las resoluciones a ser analizadas constan de dos tipos de datos: por un lado, las escrituras producidas por los sujetos al resolver; por otro lado, el discurso mediante el que dan cuenta de las razones por las cuales resolvieron de la manera en que lo hicieron.

El instrumento con el listado de ecuaciones a resolver estuvo construido sobre la base del trabajo teórico realizado previamente en el marco de la elaboración del proyecto de investigación. Es por este motivo que algunas de las ecuaciones son las mismas que las que están utilizadas como ejemplo en la tabla de categorías e indicadores presentados anteriormente.

En el siguiente cuadro se muestran algunas de las ecuaciones que se les dieron a estudiantes para resolver y se fundamentan el porqué de su elección.

$7x + 1 = 71$	$7x + 1 = 57$	$4x - 15 = 2x + 7$
Esta ecuación es sencilla de resolver por medio del cálculo mental. El "+1" en conjunto con el "1" del 71 favorece a la interpretación de que $7x$ debe tomar el valor 70 y que, por lo tanto, la solución es 10.	Esta ecuación también es relativamente sencilla de resolver por medio del cálculo mental. Pero, en comparación con la anterior, no hay una asociación tan directa como la del "+1" con el "1" del 71. A pesar de esto, se podría llegar a la conclusión de que, para que $7x + 1$ tome el valor 57, $7x$ debe tomar el valor 56. Sin embargo, dependiendo del repertorio de cálculo mental del estudiante que resuelve, puede no ser tan sencillo determinar qué número multiplicado por 7 da como resultado 56.	Este tipo de ecuaciones, en donde la variable se encuentra en los dos miembros, no es sencillo de resolver por medio del cálculo mental (salvo en algunos casos muy particulares). Su inclusión en el instrumento tiene la intención de obtener la resolución por medio del cálculo mental y, en consecuencia, forzar la operatoria algebraica.

En este cuadro se muestran algunas de las ecuaciones que se les dieron a expertos para resolver y se fundamentan el porqué de su elección.

$(x - 1) \cdot 7 = 20$	$\frac{3x+1}{6x+2} = \frac{1}{3}$	$2^x+3=1$
Esta ecuación no se puede resolver por medio de un cálculo mental sencillo. Es necesario hacer transformaciones, aunque se hagan sin escribir. Podría aplicarse la propiedad distributiva y trabajar con enteros "hasta el final", o se podría resolver por medio de la suma $20/7 + 1$, lo que implica operar con fracciones.	Si esta ecuación se resuelve de manera algebraica, realizando transformaciones, es necesario considerar su dominio para determinar si la solución hallada es efectivamente solución de la ecuación. También se podría verificar evaluando la variable en el valor obtenido y analizar si se cumple la igualdad. Sin embargo, también es posible "leer" que en el miembro izquierdo el valor del "denominador" de la expresión racional es la mitad del valor del "numerador" para cualquier valor de la variable distinto de $-\frac{1}{3}$, por lo que en esos casos el valor del miembro izquierdo es $\frac{1}{2}$ y, por lo tanto, no se cumple la igualdad.	Esta ecuación se puede resolver interpretando la expresión del miembro izquierdo como la fórmula de una función exponencial con asíntota horizontal $y=3$ y cuyo gráfico se encuentra "por encima" de esa asíntota. De esta manera se puede deducir que la ecuación no tiene solución. De manera algebraica se puede despejar utilizando un logaritmo, quedando este con argumento negativo. De este hecho se podría deducir que la ecuación no tiene solución.

Para el momento de lograr la producción verbal de los sujetos se prepararon algunas preguntas a modo de guía, sin dejar de tener en cuenta que la entrevista clínica tiene un formato en el cual "la intervención del experimentador tiene que ser extremadamente flexible y tener en cuenta lo que el sujeto está haciendo" (Delval, 1998, p. 956). Es por este motivo que exponemos algunas de las preguntas preparadas antes de las entrevistas y otras que surgieron durante las entrevistas.

Preguntas preparadas antes de las entrevistas		
¿De qué manera pasaste de este renglón al siguiente? ¿Qué viste en este renglón y cómo lo usaste para escribir el siguiente?	¿Algunos de estos pasos los hiciste "de memoria" (o de manera mecánica)? ¿Qué cosa memorizada utilizaste?	¿Por qué no resolviste [de esta manera]? (de una manera determinada en función de una resolución particular, apelando a alguna estrategias que ponga en juego mecanismos semánticos) ¿Sabías que se podría resolver [de esa manera]?
¿Cómo sabés que este paso de resolución es correcto, está bien o es válido?	¿En todos los pasos usaste la misma estrategia? En caso afirmativo, ¿cuál fue? En caso negativo, ¿cuál usaste en cada paso?	¿Este paso lo pensaste de esa única manera? ¿Se te ocurre otra manera de pensarlo u otra manera de seguir resolviendo?

Preguntas que surgieron durante las entrevistas		
¿Qué pensaste para resolver esta primera ecuación? ¿Acá podrías usar la misma estrategia que acá? ¿Y cómo sería en este caso? ¿Y por qué elegís... em... restar $5x$?	¿Por qué si restas menos $2x$ de un lado, también lo tenés que restar del otro?	Para vos, ¿qué es la solución de una ecuación? ¿Y cómo te puedes dar cuenta si el 2 es la solución? ¿Y acá, por ejemplo, que te quedó menos $2x$ igual a 22? (Elegiendo una ecuación que se pueda resolver por medio de cálculo mental)

Preguntas que surgieron durante las entrevistas		
¿Y vos hacés eso para controlar?	¿En qué sentido una resolución depende de una ecuación?	¿Y qué ecuaciones sí tienen solución? ¿Y qué ecuaciones no tienen solución?

Datos insuficientes, resoluciones no previstas y categorías emergentes

En esta sección se contarán y describirán algunas situaciones que permitieron notar problemáticas vinculadas a los elementos utilizados para producir y analizar los datos del trabajo de campo. Cada uno de estos episodios se acompañará con algunas preguntas que se formularon a propósito de ellos, las que se tratarán de responder en la sección final como conclusión del trabajo de reflexión.

Datos insuficientes: la temporalidad de las escrituras

Como se mencionó anteriormente, en uno de los acercamientos al campo se trabajó con estudiantes de escuela secundaria. Luego de obtener sus producciones escritas y las grabaciones y desgrabaciones de las entrevistas orales, se pasó a realizar el análisis cualitativo correspondiente. Fue en ese momento de trabajo que se percibió una falta de información sobre las resoluciones, que fue producto de no haber registrado un elemento que no se había tenido en cuenta: la temporalidad de las escrituras. A continuación se analizan dos casos en donde se puede apreciar cómo repercute la falta de esta información en el análisis de las resoluciones.

Ejemplo 1: estudiante 1

En este ejemplo se analiza la resolución de un estudiante que resuelve ecuaciones de manera eficaz. En la escritura que se muestra es posible identificar que el estudiante pone en juego la propiedad uniforme al restar 1 en ambos miembros. En efecto, durante la entrevista declara: “Resté 1 en ambos lados para sacar el 1, porque si resto 1 de un lado tengo que restar 1 del otro.”

Sin embargo, puede haber sucedido que, en realidad, en un primer momento el estudiante se haya guiado por un pasaje de términos. Por ejemplo, pudo haber escrito primero el “-1” del miembro derecho y luego “ajustar” la escritura a la propiedad uniforme, agregando el “-1” del miembro izquierdo. Esta temporalidad de la escritura no pudo ser registrada ni por medio del registro escrito ni por medio de las entrevistas.

$$\begin{array}{l}
 7x + 1 = 71 - 1 \\
 7x = 70 \\
 x = 10
 \end{array}$$

Ejemplo 2: estudiante 2

En este ejemplo se analiza la resolución de un estudiante que no resuelve ecuaciones de manera eficaz, lo que nos permite poner el foco en uno de sus errores. Para producir el segundo renglón realiza una

$$\begin{array}{l}
 4x - 15 = 2x + 7 \\
 4x - 4x - 15 = 2x + 7 - 4x \\
 -15 = -2x + 7 \\
 -15 = -2x - 2x + 7
 \end{array}$$

transformación restando “ $4x$ ” en ambos miembros, lo que podemos identificar como una puesta en juego de la propiedad uniforme. Luego, al producir el cuarto renglón realiza una transformación sobre el tercero restando “ $2x$ ” solamente en el miembro derecho. Este hecho nos movilizó a reflexionar sobre las implicancias de la temporalidad de las escrituras asociada a la direccionalidad. En este caso, si en la primera transformación el estudiante escribió primero la resta de “ $4x$ ” en el miembro izquierdo y luego en el derecho, ¿es posible que en el segundo caso se haya “olvidado” de restar “ $2x$ ” en el miembro izquierdo porque primero lo hizo en el miembro derecho y la lectura y escritura en castellano se realiza de izquierda a derecha? En el cuarto renglón, ¿habrá escrito primero todo el miembro izquierdo y luego el derecho, en el cual restó “ $2x$ ” sin “volver” al izquierdo para “ajustar” la propiedad uniforme?

Estas situaciones nos llevan a plantear algunos interrogantes. ¿Es necesario registrar esta temporalidad? ¿Cómo se podría hacer? ¿Filmando las resoluciones? ¿No es esto invasivo? ¿O el entrevistador podría ir registrando de alguna manera ciertas acciones asociadas a la temporalidad?

Resoluciones no previstas: los expertos resuelven de manera puramente sintáctica

En otro de los acercamientos al campo se trabajó con un experto que es profesor universitario. En uno de los pasajes de la entrevista oral se indagó sobre la resolución que se muestra en la imagen. Al ser consultado sobre cómo pasó de un renglón al siguiente el experto hizo referencia al pasaje de términos. Luego de esto, al preguntarle por qué lo resolvió así y cómo sabe que es válido, respondió de manera sorprendente en comparación con lo que se había previsto en el diseño de la investigación, en el que se suponía que iba a apelar a cuestiones semánticas.

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= 5x - 3 \\ 2 + 3 &= 5x - 3x \\ S &= 2x \\ \boxed{\frac{S}{2} = x} \end{aligned}$$

Investigador: ¿Cómo hiciste para pasar de un renglón al otro?

Experto: Primero pasé restando el $3x$ y pasé sumando el 3. Después hice las cuentas y pasé dividiendo el 2.

I: ¿Por qué lo hiciste así?

E: Porque se resuelve de esa manera. Lo paso para el otro lado y voy despejando.

I: ¿Cómo sabés que es válido?

E: La verdad es que mientras resuelvo no pienso si es válido. Sé que se resuelve así y que está bien. Si querés te digo que resté $3x$ de los dos lados y que de un lado se cancela. Y lo mismo con el 3. Pero la verdad es que no lo pensé así. Aunque sé que es válido por la propiedad uniforme.

Este episodio nos movilizó a reflexionar sobre varias cuestiones. Una de ellas está vinculada al instrumento que utilizamos para producir los datos. Si las ecuaciones que

proponemos para resolver son tales que los expertos pueden resolverlas mediante componentes puramente sintácticos o, al menos, de manera que no les permiten reconocer los componentes semánticos de sus resoluciones, ¿son entonces pertinentes para producir los datos necesarios para la investigación? Otra de las cuestiones sobre las que reflexionamos está vinculada al modo en que los profesores enseñan en relación a cómo resuelven. Si los expertos resuelven según las características descritas, por medio de reglas sintácticas con un sólido control del dominio de aplicación sin validar sus procedimientos de manera explícita, ¿cómo repercute ese hecho en las características de su enseñanza? ¿Es esperable que su discurso de enseñanza tenga menos presencia de componentes semánticos que de componentes sintácticos y que no los articulen?

Una categoría emergente: la anticipación

Los siguientes episodios también sucedieron en el trabajo con un experto que es profesor universitario.

Una estrategia para resolver y otra para verificar

Con respecto a esta resolución, se le preguntó al experto por qué no había aplicado la propiedad distributiva para resolver. Él contestó que le había parecido más fácil resolver de esa manera porque se ahorra un paso, ya que si aplicaba la propiedad distributiva tenía que escribir $7x - 7 = 20$, después pasar sumando el 7 y por último dividir por 7. Pero agregó que, en cambio, sí había utilizado la propiedad distributiva para verificar. Describió que al evaluar la variable en $27/7$ “vio” que si multiplicaba por 7 “se le iba” el 7 del denominador. Entonces verificó la solución mentalmente mediante el cálculo $27/7 \cdot 7 - 1 \cdot 7 = 27 - 7 = 20$.

$$\begin{aligned}(x-1) \cdot 7 &= 20 \\ x-1 &= \frac{20}{7} \\ x &= \frac{27}{7}\end{aligned}$$

Al momento de analizar esta resolución detectamos que las categorías construidas a priori nos resultaban insuficientes para tratar con los procesos de anticipación empleados por el experto. En el caso del proceso de resolución, pareciera que el experto de alguna manera sabe que va a necesitar menos pasos resolviendo de un modo determinado, sin necesidad de contar esos pasos y compararlos con la cantidad que llevaría otra resolución. ¿Es esta anticipación una nueva categoría de análisis? ¿Es de orden sintáctico, de orden semántico o corresponde a la articulación entre ambos órdenes? ¿Entra dentro de nuestra investigación en cuanto a las escrituras y la perspectiva semiolingüística?

Cuando la validación no aporta a la comprensión

A propósito de esta escritura, durante la entrevista se le preguntó al experto cómo había llegado a esa conclusión. Él manifestó que había pensado en la expresión del miembro izquierdo “como una función exponencial con asíntota en 3 cuyo gráfico está por arriba” y, en consecuencia, dedujo que “nunca puede dar 1”. Cuando se le preguntó si en este caso había verificado la solución, como lo había hecho en casi todas las ecuaciones anteriores, el entrevistado dijo que no, que no le pareció que hiciera falta. Ante la insistencia

$$2^x + 3 = 1 \rightarrow S = \emptyset$$

del entrevistador para indagar por qué en este caso creía que no hacía falta, contestó que no sabía, que le parecía que su razonamiento era suficiente.

Al analizar este episodio consideramos que, aunque él no lo pueda explicitar, es la posibilidad de anticipar lo que hace que el experto no sienta la necesidad de validar la solución de manera algebraica. Por ejemplo, si en esa ecuación se despeja la variable se obtiene la expresión , de la cual se podría concluir que, como la operación no está definida, entonces no existe ningún valor de la variable que sea solución. Pero las razones matemáticas de por qué no existe el logaritmo de un número negativo se vinculan con la forma exponencial de la ecuación y con el razonamiento de que no existe ninguna potencia de 2 que dé un resultado negativo. En definitiva, la validación es circular y no aporta más de lo que ya se sabía. Nuevamente nos preguntamos si es la anticipación una categoría que debemos considerar en nuestra investigación, ya que guía el tipo de resolución elegida. ¿Cómo sabe el experto que en este caso mediante el despeje no va a “llegar a algo nuevo” que le aporte mayor comprensión? ¿Es realmente un caso de anticipación?

Conclusiones

Si bien no es una cuestión que se muestre en este trabajo, estas primeras aproximaciones al campo nos permitieron concluir que la perspectiva semiolingüística y el empleo de los conceptos de sintaxis, semántica y articulación son fértiles para poder comprender maneras eficaces de resolver ecuaciones. También nos permitieron testear que las categorías construidas *a priori* resultaron pertinentes para caracterizar las resoluciones de estudiantes y expertos. Sin embargo, a partir de los ejemplos expuestos en esta ponencia mostramos que estas categorías pueden resultar insuficientes para incorporar al análisis elementos que consideramos relevantes, lo que nos obliga a crear algunas nuevas y ajustar los instrumentos de producción de datos para poder hacer emerger y capturar dichos elementos.

Con respecto a la temporalidad de las escrituras consideramos que es relevante poder registrarla, pues brinda información acerca de cuestiones sintácticas, como puede ser el “lugar” que se considera más relevante para comenzar a operar; y de cuestiones semánticas, como podría ser la interpretación que se hace del signo igual dependiendo de la dirección de la resolución. Creemos que, para no perturbar la escena y ser lo menos invasivo posible, el entrevistador podría ir anotando las resoluciones de los entrevistados en un dispositivo electrónico que registre la temporalidad. Sin embargo, es necesario tener en cuenta que esto requiere de su presencia en el momento en el que los entrevistados resuelven.

Con respecto a la resolución de los expertos empleando exclusivamente reglas sintácticas queremos hacer dos consideraciones. Por un lado, creemos que es necesario producir un instrumento con ecuaciones que los obliguen a poner en juegos componentes semánticos en sus resoluciones, para poder identificar cuáles son los que utilizan, cómo lo hacen y cómo los articulan con componentes sintácticos. Por otro lado, consideramos que resulta necesario indagar sobre la relación entre estos modos de resolver y los discursos durante la enseñanza. Arriesgamos una hipótesis: los expertos construyen estas reglas de resolución articulando componentes sintácticos y semánticos que “desaparecen” con el tiempo y que dan lugar a reglas de características puramente sintácticas;

al momento de enseñar, los docentes no incluyen esos componentes semánticos en su discurso porque ya no son explícitos en sus resoluciones, por lo que no se consideran como necesarios de ser enseñados.

En cuanto a los procesos de anticipación, creemos que para estudiarlos es necesario pensar detenidamente sobre los conocimientos que permiten realizarlos. Podemos intuir que están comprometidos componentes sintácticos y semánticos, y su articulación. Entre los sintácticos, por ejemplo, los vinculados a la lectura de las expresiones: jerarquía de las operaciones, relaciones entre numeradores y denominadores, reconocimiento de la ubicación de la variable (por ejemplo, en el caso de la ecuación exponencial), etc. Entre los semánticos, por ejemplo, los relacionados con el cálculo mental: si a un número se le suma un número positivo el resultado es mayor que el primero, la simplificación entre numeradores y denominadores en el producto de fracciones, la no existencia de potencias de base positiva que den como resultado un número negativo, etc. Sin embargo, pareciera que en estos procesos de anticipación también están implicados ciertos conocimientos memorizados como resultado de una práctica sistemática. Además de realizar consideraciones sintácticas y semánticas pareciera que los expertos realizan consideraciones pragmáticas, vinculadas a la conveniencia de un procedimiento y, tal vez, fundada en la experiencia.

Referencias bibliográficas

- Delval, J.** (1998). *El desarrollo humano*. Veintiuno editores.
- Drohuard, J-Ph.** (2010a). Las Expresiones Simbólicas del Álgebra y su Sintaxis. <https://drive.google.com/file/d/1bMe5zHIRtFkD48oLOshBbA4chDz2fE1b/view>
- Drohuard, J-Ph.** (2010b). Semántica de las Expresiones Simbólicas del Álgebra. https://drive.google.com/file/d/17_UwvhrXKb-PJkQW_7-KF_CgUb3WzUrK/view?usp=drive_link
- Ducrot, O., y Todorov, T.** (2011). *Diccionario enciclopédico de las ciencias del lenguaje*. Siglo XXI Editores Argentina.
- Frege, G.** (1974). *Escritos lógico-semánticos*. Tecnos.